Расчёт светораспределения условно точечного источника света в произвольно ориентированной системе координат

*С.В. ПРЫТКОВ *, А.О. СЫРОМЯСОВ*

НИУ «МГУ им. Н.П. Огарёва», Саранск

* E-mail: sergeyvladi88@gmail.com

Аннотация

Рассматривается задача вычисления суммарного светораспределения нескольких разно ориентированных в пространстве ИС, местоположения которых условно[1] совпадают друг с другом. Предполагается, что индикатрисы силы света ИС описываются в формате *IESNA* (или, что то же самое, в виде таблиц). Предлагаются два метода решения задачи. Первый связан с предварительной тригонометрической интерполяцией индикатрисы силы света каждого ИС, выполняемой с помощью дискретного преобразования Фурье, а второй основан на кусочно-линейной интерполяции этой индикатрисы с использованием триангуляции Делоне. Оба метода реализуемы в распространённых математических пакетах (таких как «*Wolfram Mathematica*» или «*Octave*») и их пригодность проверена экспериментально.

Ключевые слова: угловое распределение силы света, суммарное светораспределение, фотометрические данные, тригонометрическая интерполяция, дискретное преобразование Фурье, кусочно-линейная интерполяция, триангуляция Делоне, поворот системы координат, преобразование координат.

Введение

Несколько лет назад в научных публикациях стал наблюдаться интерес к идее проектирования осветительных приборов (ОП) с единицами–десятками светодиодов (СД) или СД модулей со вторичной оптикой, имеющих разную ориентацию в пространстве [1–4]. Такой подход имеет два преимущества. Во-первых, он позволяет создавать ОП с фотометрическим телом (ФТ) любой сложности с использованием вторичной оптики простой геометрии. Во-вторых, обеспечивая в конструкции ОП с СД возможность «поворачивания» отдельных СД (СД модулей), можно оптимизировать его светораспределение в зависимости от условий освещения.

Правда, за последнее десятилетие существенно расширилась номенклатура вторичной оптики для светильников с СД уличного освещения, и потому указанный подход к разработке светильников этой категории, по сути, потерял актуальность. Вместе с тем, по нашему мнению, он по-прежнему актуален, например, в разработках ригельных светильников для освещения объектов железнодорожного транспорта и производственных помещений и светильников для архитектурного освещения зданий и сооружений. Соответственно, по-прежнему актуальны исследования по нахождению суммарного углового распределения силы света (пространственного светораспределения) системы разноориентированных ИС, у которых известны ФТ (или, что то же, индикатрисы силы света).

Решение задачи существенно осложняется тем, что ФТ исходных ИС трёхмерны. Даже в недавней работе по математическому моделированию СД модулей [5] рассматривается зависимость светораспределения от одного полярного угла, т.е. фактически решается двумерная задача.

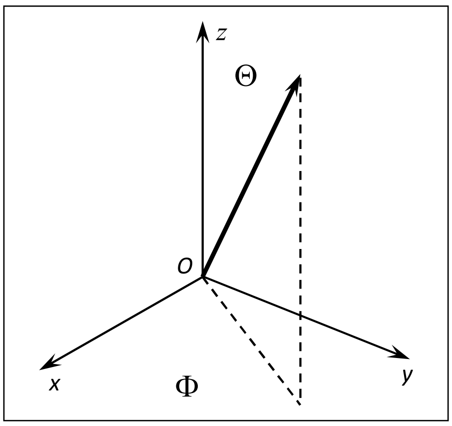

Рис. 1. Угловые координаты в сферической системе

К настоящему времени известен метод, разработанный С.Г. Ашурковым и А.А. Барцевым [1], который позволяет решать трёхмерную задачу при условии осесимметричности исходных ФТ ИС. В настоящей статье предлагается два способа решения этой задачи, но уже без указанного ограничения, т.е. при несимметричных исходных ФТ ИС.

Постановка задачи о расчёте суммарного светораспределения

Известно, что ФТ точечного ИС есть функция $I(\vec{e})$, выражающая зависимость значений силы света I от направления $\vec{e}$. Последнее можно определять двумя углами в одной из систем (A,α), (B,β) или (C,γ) [6]. С точки зрения математики построение ФТ есть изображение поверхности в сферической системе координат, где I играет роль радиуса, а угловые координаты зависят от выбора системы фотометрирования.

Как правило, ФТ находится по данным измерений на гониофотометре, представляемым в формате *IESNA* [7] – по сути, в виде таблицы, в которой значения угловых координат приведены с определённым шагом и значения силы света соответствуют каждой паре таких координатных значений.

Обозначим через Θ и Φ угловые координаты в некоторой сферической системе (рис. 1), $\Theta \in [0°, 180°]$ и $\Phi \in [0°, 360°]$, и пусть измерения ведутся с шагом $\Delta\Theta$ по первому углу и $\Delta\Phi$ – по второму. Введя следующие обозначения:

$$\Theta_k = k\Delta\Theta,\ \Phi_l = l\Delta\Phi, \qquad (1)$$

где $k = 0 – N_\Theta$, $l = 0 – N_\Phi$, $N_\Theta = 180°/\Delta\Theta$ и $N_\Phi = 360°/\Delta\Phi$, получим, что известными являются величины

$$i_{kl} = I(\Theta_k, \Phi_l). \qquad (2)$$

Далее рассмотрим несколько ИС, расположенных в одной точке, ФТ каждого из которых известна и задана равенствами (1) и (2). При этом все ФТ описаны в одной и той же системе фотометрирования, например, (C,γ), роль угла γ в которой играет

[1] Условно находятся кучно на большом расстоянии от фотоприёмника.

Θ, а роль угла Φ – C. (Логично предполагать также, что шаги $\Delta\Theta$ и $\Delta\Phi$ при измерении являются общими для всех ИС, хотя это предположение и не критично.)

ИС являются пространственно разно ориентированными и светораспределение каждого из них описано в *собственной* системе координат, жёстко связанной с данным конкретным ИС. При этом взаимное расположение ИС известно, т.е. известна последовательность поворотов, позволяющая совместить собственные системы координат.

Ставится задача: найти суммарное светораспределение вышеописанных условно точечных ИС.

В связи с несовпадением систем координат непосредственно сложить значения i_{kl} разных ИС в соответствующих узлах сетки невозможно. Требуется предварительно выбрать некую *общую* систему координат, пересчитать в ней функции $I(\vec{e})$ для каждого ИС и лишь затем выполнить сложение. Для сокращения вычислений в качестве общей системы можно выбрать собственную систему координат одного из ИС.

Ниже описаны два метода решения поставленной задачи и приведено описание экспериментальной установки, с помощью которой были подготовлены входные данные для проверки произведённых теоретических выкладок и выполнено сравнение методов.

Использование тригонометрической интерполяции

Пусть аналитическое выражение для ФТ каждого ИС известно:

$$I_j = I_j(\Theta,\Phi),\ j = 1\text{–}N, \qquad (3)$$

где N – общее число ИС, индекс j используется для их нумерации, а углы Θ и Φ соответствуют собственной системе координат j-го ИС.

Поскольку формулы преобразований, совмещающих собственные системы разных ИС, известны, то можно найти зависимость между угловыми координатами в собственной системе и её координатами θ и φ в общей системе (в которой и будет происходить сложение ФТ ИС). Для j-го ИС указанная зависимость будет иметь вид

$$\Theta = T_j(\theta,\varphi),\ \Phi = F_j(\theta,\varphi), \qquad (4)$$

Согласно выражениям (3) и (4), суммарное светораспределение N ИС в упомянутой общей системе координат выразится как

$$I(\theta,\varphi) = I_1(T_1(\theta,\varphi),F_1(\theta,\varphi)) + ...$$
$$+I_N(T_N(\theta,\varphi),F_N(\theta,\varphi)). \qquad (5)$$

Более подробно указанный подход был описан в [8], а в данной работе построены модельные примеры его применения.

Для реализации указанного подхода требуется восстановить функции (3) по исходным данным вида (1)–(2).

Ранние попытки решения данной задачи описаны в [9]. ФТ раскладывалась по степеням $\cos\theta$. Недостатки этого решения – учёт лишь одной угловой переменной (т.е. переход из пространства в плоскость) и малое число слагаемых в разложении (всего 4). В недавней работе [5] авторы повысили точность таких разложений, многократно увеличивая число слагаемых и совершенствуя методы поиска коэффициентов в такого рода суммах, но проблема перехода из плоскости в пространство осталась ими нерешённой.

Возможные подходы к решению указанной проблемы, разные по точности и трудоёмкости, описаны в [3, 10]. Обстоятельством, которое необходимо учитывать при интерполяции фотометрических данных, служит периодичность ФТ (3) по их аргументам: очевидно, период функций I_j по переменной Θ должен составлять 180°, а по Φ – 360°. Поэтому логично искать эти функции в виде двойных тригонометрических рядов по Θ и Φ.

Набор данных вида (1)–(2) конечен, поэтому фактически речь идёт о тригонометрических многочленах с $(N_\Theta + 1)\ N_\Phi$ слагаемыми; коэффициенты этих многочленов подлежат определению:

$$I(\Theta,\Phi) =$$
$$= \sum_m \cos m\Theta \sum_n (a_{mn}\cos(n\Phi) +$$
$$+b_{mn}\sin(n\Phi)). \qquad (6)$$

В реальных фотометрических экспериментах шаги $\Delta\Theta$ и $\Delta\Phi$ малы, и поэтому число неизвестных весьма велико: так, при $\Delta\Theta = 1°$ и $\Delta\Phi = 5°$ оно равно 13032. В связи с этим возникает вопрос о наиболее быстром и при этом точном методе тригонометрической интерполяции.

Как показано в [4], таковым является метод с использованием дискретного преобразования Фурье. В своём простейшем варианте оно позволяет приближённо восстанавливать периодическую функцию по её известным значениям. При этом для последовательности $\{x_k\}$ с периодом N дискретное преобразование Фурье задаётся формулой

$$X_n = \sum_{k=0}^{N-1} x_k \exp(-i\frac{2\pi nk}{N});$$

тогда непрерывная функция

$$x(t) = \frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1} X_n \exp\left(i\frac{2\pi nt}{N\Delta t}\right)$$

периодична, причём $\{x_k\}$ – её значения, полученные при значениях t, взятых с шагом Δt [11].

Указанное преобразование, обобщённое для периодической по двум переменным функции, и следует применить к набору данных (2), после чего надо выделить действительную часть в полученном выражении и затем сократить число слагаемых, исключив из суммы все выражения, коэффициенты a_{mn} и b_{mn} в которых меньше некоторого наперёд заданного числа (оно определяется с учётом желаемой точности).

Итак, согласно первому алгоритму вычисления суммарного светораспределения нескольких ИС по результатам фотометрических экспериментов, следует:

- применив дискретное преобразование Фурье к данным (1)–(2), найти светораспределение (3) каждого ИС в его собственной системе координат;
- зная взаимное расположение ИС, конкретизировать преобразования (4),

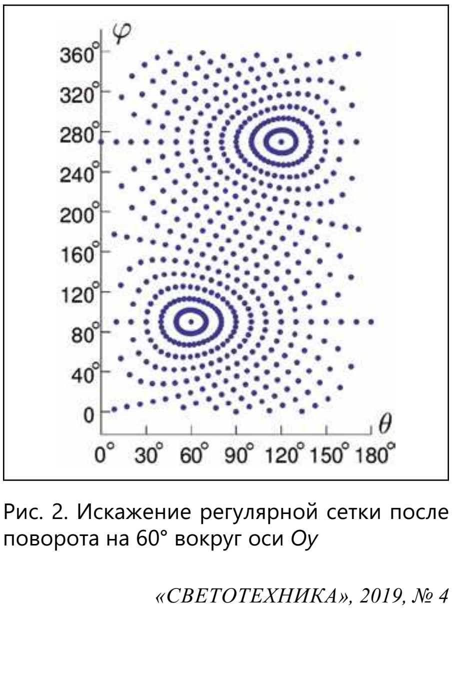

Рис. 2. Искажение регулярной сетки после поворота на 60° вокруг оси *Oy*

связывающие угловые переменные в собственных системах координат ИС и в общей;

- вычислить суммарное светораспределение (общее ФТ) в общей системе координат по формуле (5).

Непосредственным результатом этих действий будет некая (весьма громоздкая) формула, выражающая искомую функцию $I(\theta,\varphi)$. Последняя может казаться неудобной, но её можно с пользой использовать для составления таблицы значений вида (2), и с её помощью получить выражение вида (6) в общей системе координат.

Использование кусочно-линейной интерполяции

Если ФТ (3) каждого отдельно взятого ИС не представляют интереса, применения дискретного преобразования Фурье можно попытаться избежать. При этом следует сразу перейти к общей системе координат. Угловые координаты, которым после этого перехода соответствуют измеренные силы света i_{kl}, могут определяться из системы (4), разрешаемой относительно θ и φ:

$$\theta = t_j(\Theta,\Phi),\ \varphi = f_j(\Theta,\Phi),\quad j = 1\text{–}N. \tag{7}$$

После подстановки в (2) и (7) значений Θ_k и Φ_l для всех N ИС получится таблица значений силы света вида

$$i_{kl} = I_j(\Theta_k,\Phi_l), \tag{8}$$

где, согласно (7), $\theta_k = t_j(\Theta_k,\Phi_l)$ и $\varphi_l = f_j(\Theta_k,\Phi_l)$.

Поскольку разным ИС соответствуют разные функции t_j и f_j, то одни и те же углы Θ_k и Φ_l после преобразования координат переходят в разные углы θ_k и φ_l. В итоге сложение i_{kl}, отвечающих разным ИС, сразу после поворачивания невозможно. Этой проблемы не возникало при использовании аналитических выражений (3), т.к. они позволяют находить I_j в любой точке. Поэтому для всех повороченных ИС следует выполнять интерполяцию – определять силы света разных ИС в одних и тех же точках

$$\theta_p = p\Delta\Theta,\ \varphi_q = q\Delta\Phi, \tag{9}$$

где шаги изменения угловых переменных в собственных и общей системах координат удобно выбирать совпадающими.

Сетка Θ_k, Φ_l, покрывающая область [0°; 180°] × [0°; 360°], после поворачивания перестаёт быть регулярной (рис. 2).

Среди методов, применимых к данным сеткам, кусочно-линейная интерполяция наиболее проста и при достаточном числе узлов сетки обеспечивает приемлемую точность. Поэтому далее используется именно этот метод. Для его реализации предварительно требуется выполнить триангуляцию области по узлам полученной нерегулярной сетки, выяснить, в какой из треугольников разбиения попадает та или иная точка (9), и найти I_j в этой точке, зная i_{kl} в вершинах треугольника.

Абсолютная погрешность при такой интерполяции известна [3]: внутри каждого треугольника она не превышает $M{\cdot}h^2/6$, где M – наибольшее значение вторых производных аппроксимируемой функции, h – диаметр описанной окружности треугольника. Чтобы снизить погрешность, требуется минимизировать h. В связи с этим для минимизации погрешности разбиение указанной области производится с помощью триангуляции Делоне [12]. При таком подходе ни один узел сетки не попадает внутрь описанной окружности любого построенного треугольника. Характерной чертой триангуляции Делоне служит минимальность суммы радиусов описанных окружностей всех треугольников. Следовательно, именно этот подход «в среднем» обеспечивает наименьшую погрешность.

Достоинство данного алгоритма и в том, что он встроен во многие математические пакеты, например «*Mathematica*» [13] или «*Octave*», и не требует дополнительного программирования.

Окончательно, второй алгоритм расчёта суммарного светораспределения состоит в последовательном выполнении следующих шагов:

- Переход к общей системе координат по формулам (7) и (8).
- Разбиение расчётной области при помощи триангуляции Делоне.
- Кусочно-линейная интерполяция фотометрических данных всех ИС в одних и тех же точках (9).
- Сложение сил света разных ИС в точках (9).

Результатом выполнения данного алгоритма служит таблица суммарных значений силы света.

Реализация этого плана действий связана с некоторыми трудностями.

Во-первых, в собственных системах координат результаты фотометрии при Θ = 0° дают разные силы света при разных углах Φ, хотя, исходя из введения сферической системы координат, эти значения должны быть одинаковыми (рис. 1). Аналогичное утверждение верно при Θ = 180°. Этот эффект может объясняться как вибрацией гониофотометра при измерениях, так и тем, что светильник в разные моменты времени может давать больше или меньше света, а фотометрические измерения не происходят мгновенно.

При использовании дискретного преобразования Фурье это явление не критично, ибо ключевое значение имеет регулярность расположения точек (Θ_k, Φ_l); а при кусочно-линейной интерполяции оно играет отрицательную роль. Вследствие этого сила света каждого ИС в одной точке принимает несколько значений, что делает интерполяцию невозможной.

Чтобы решить данный вопрос, угол Θ = 0° в таблицах фотометрических данных заменяется на $\Delta\Theta/100$, а угол Θ = 180° – на (180° – $\Delta\Theta/100$). В результате разные значения силы света в окрестностях Θ = 0° и 180° соответствуют разным (хотя и близко расположенным) точкам пространства.

Во-вторых, если исходная сетка (1) в собственной системе координат того или иного ИС покрывает всю область [0°; 180°] × [0°; 360°], то нерегулярная

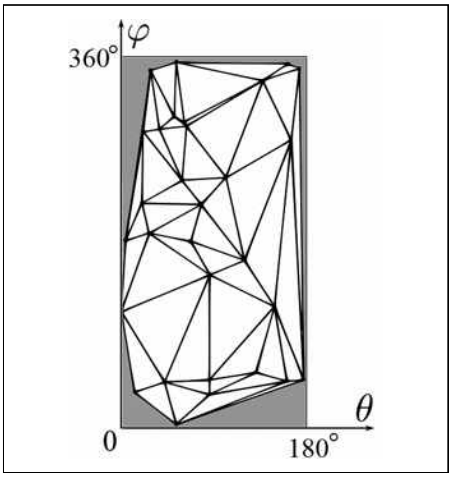

Рис. 3. Неполное накрытие области [0°; 180°] × [0°; 360°] нерегулярной сеткой

а) **б)**

Рис. 4. Источники света, использованные в фотометрическом эксперименте: *а* – ИС 1; *б* – ИС 2

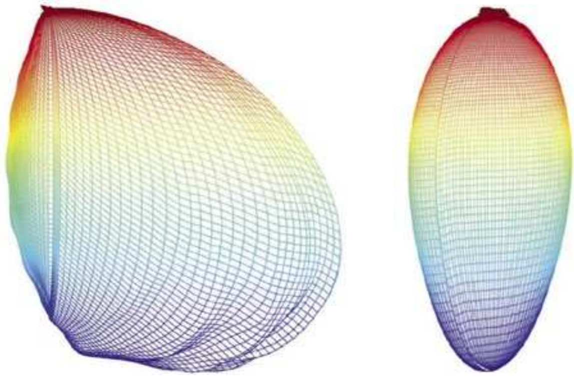

Рис. 5. Фотометрические тела источников света ИС 1 и ИС 2, полученные экспериментально

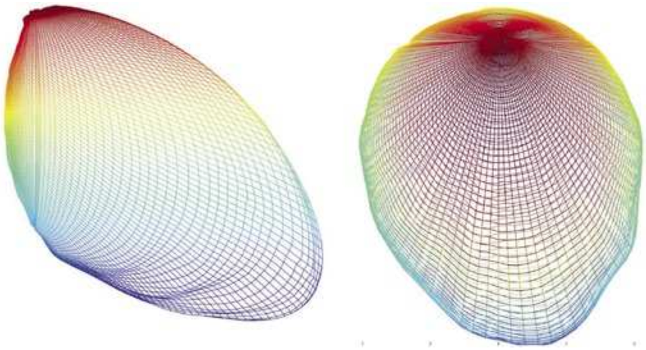

Рис. 6. Суммарные фотометрические тела, полученные экспериментально

сетка в общей системе, полученная с помощью преобразований (7), «отступает» от её краёв (рис. 3).

В районах, не накрытых сеткой, вместо интерполяции приходится применять экстраполяцию, что ведёт к большим погрешностям.

Для решения этого вопроса исходная (регулярная) сетка расширяется, причём используются периодичность функций $I_j(\Theta, \Phi)$ по обеим переменным и их чётность относительно Θ. Так, например, вместо диапазона [0°, 360°] рассматриваются пределы изменения угла Φ от $-10\Delta\Phi$ до $360° + 10\Delta\Phi$. Как показывает практика, описанного расширения достаточно для полного накрытия области [0°; 180°] × [0°; 360°] нерегулярной сеткой в общей системе координат.

Описание эксперимента

Реальные данные, необходимые для проведения сравнительного анализа описанных выше методов, были получены в ходе гониофотометрического эксперимента. На рис. 4 представлены участвовавшие в эксперименте СД ИС. Первый из них (ИС 1) –кососвет, изготовленный на базе СД лампы *Feron 3602 LB-24 MR16*, а второй (ИС 2) –сопоставимая с ИС 1 по мощности СД лампа для акцентного освещения с осесимметричным светораспределением.

Распределение силы света измерялось при нормальных условиях посредством гониофотометрического комплекса *GO2000A*, содержащего: гониометр *GO2000A* (диапазон поворачивания в горизонтальной и вертикальной плоскостях: ± 180°, точность установки угла поворота: 0,1°); фотометр *ID-1000,* на основе кремниевого фотодиода, скорригированный под функцию $V(\lambda)$, класса точности «*L*»; источник питания *DPS1060*.

Все фотометрические данные, использованные в дальнейших расчётах, представляют собой среднее арифметическое результатов 5 измерений.

Фотометрирование производилось в системе (C, γ). Шаг измерения для плоскости C составлял 5°, а для плоскости γ – 1°. Экспериментальные ФТ каждого ИС представлены на рис. 5.

Для измерения суммарного светораспределения указанных источников ИС 1 был установлен таким образом, чтобы его геометрическая ось была параллельна оси фотометрирования, а у ИС 2 ориентация была задана последовательностью поворачиваний его геометрической оси: вокруг оси *Ox* на 46°, а затем вокруг оси *Oz* на 190° . Общая система координат была связана с ИС 1. Суммарное ФТ, полученное в результате измерений, представлено на рис. 6.

Сравнение расчётных методов

Критериями сравнения расчётных методов служили простота реализации алгоритмов, быстрота их работы и точность.

Оба метода были реализованы в системе «*Wolfram Mathematica*». Исходные фотометрические данные были импортированы из *XLS*-файла с помощью встроенных функций этого математического пакета. Как дискретное преобразование Фурье, так и кусочно-линейная интерполяция на нерегулярной сетке также являются стандартными функциями данного ПО, причём при этой интерполяции «*Mathematica*» использует триангуляцию Делоне. С учётом этих обстоятельств трудоёмкость программирования для обоих методов в указанном пакете примерно одинакова.

То же самое можно сказать и об их быстродействии. Расчёты выполнялись на ноутбуке с процессором *Intel Core i7–4500U Haswell* с тактовой частотой 2400 ГГц, имеющем 6 ГБ ОЗУ и находящемся под управлением операционной системы *Win 8.1×64*. В обоих случаях вычисления заняли 15–20 мин, при этом суммарное светораспределение, рассчитан-

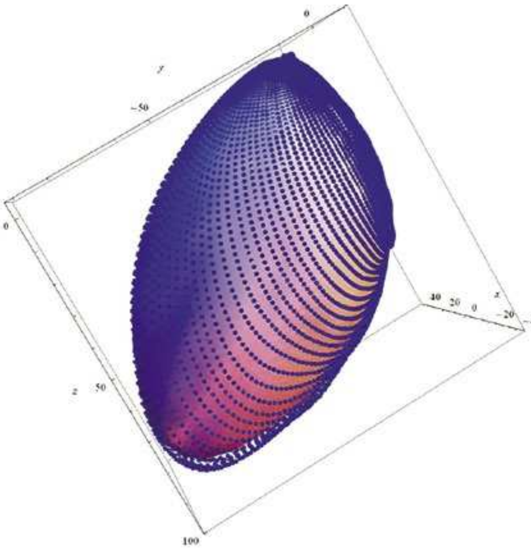

Рис. 7. Суммарное светораспределение, полученное с помощью тригонометрической интерполяции. Точки – экспериментальные данные, сплошная поверхность – результат расчёта

ное по обоим методам, было весьма близко к экспериментально наблюдаемому (рис. 7).

Критерием точности служила относительная погрешность вычисления значений суммарной силы света двух ИС по сравнению с её экспериментальными (измеренными) значениями I_{pq} в точках (9). Сравнение расчётных и опытных данных производилось лишь в области $I_{pq} \geq I_{max} / 2$, где I_{max} – наибольшая измеренная суммарная сила света. Такое ограничение позволяет не рассматривать районы, фактически не освещаемые ИС [3]. С другой стороны, именно в этих местах, не представляющих интереса с технической точки зрения, относительная погрешность может резко возрастать за счёт малости измеряемых значений.

В выбранной области максимальная погрешность при использовании тригонометрической интерполяции составила менее 4 %, а при использовании кусочно-линейной интерполяции – около 6,5 %.

Заключение

В статье предложены и проанализированы два метода вычисления суммарного светораспределения нескольких разноориентированных ИС, местоположения которых совпадают друг с другом. Первый связан с тригонометрической интерполяцией фотометрических данных, а второй – с их кусочно-линейной интерполяцией.

При проведении численного эксперимента с использованием реальных фотометрических данных тригонометрическая интерполяция оказалась более точной. При этом её погрешность частично связана с исключением малых слагаемых из выражений вида (6). Поэтому она может быть ещё уменьшена путём удержания в них большего числа слагаемых, правда, в ущерб быстродействию метода.

У метода кусочно-линейной интерполяции резервов для повышения точности, при заданном наборе данных вида (2), нет.

Следует отметить, что ФТ, описываемые с помощью формул типа (3) и найденные путём тригонометрической интерполяции, могут иметь самостоятельную ценность. Будучи однажды полученными, они могут в дальнейшем не раз применяться в разных расчётах, например, по преобразованию систем фотометрирования.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Ашурков С.Г., Барцев А.А.* Метод расчёта фотометрического тела излучателей со светодиодами разной пространственной ориентации // Светотехника.– 2007.– № 1. – С. 43–44.

2. *Коваленко О.Ю., Захаржевский О.А., Афонин В.В.* Моделирование светодиодного модуля по заданной кривой силы света / Системы проектирования, моделирования, подготовки производства и управление проектами CAD/CAM/CAE/PDM: II Междунар. научно-практич. конф.: Сборник статей. – Пенза: АНОО «Приволжский Дом знаний», 2008. – С. 30–33.

3. *Сыромясов А.О., Прытков С.В.* Аппроксимация фотометрических данных тригонометрическими полиномами одной переменной // Альманах современной науки и образования.– 2014.– № 5–6 (84). – С. 117–122.

4. *Сыромясов А.О.* Расчёт светораспределения точечных источников с помощью дискретного преобразования Фурье // Альманах современной науки и образования.– 2014.– № 9 (87). – С. 127–131.

5. *Kaljun D., Novak T., Žerovnik J.* Improved approximation of spatial light distribution // PLos ONE.– 2017. – N12(4): e0176252. URL: https://doi.org/10.1371/journal.pone.0176252 (дата обращения: 22.04.2019).

6. ГОСТ Р 54350–2015 «Приборы осветительные. Светотехнические требования и методы испытаний».

7. IESNA LM-63–95 «IESNA Recommended Standard File Format for Electronic Transfer of Photometric Data».

8. *Ашрятов А.А., Прытков С.В., Сыромясов А.О.* Метод расчёта пространственного светораспределения системы разноориентированных светодиодных излучателей // Компьютерные исследования и моделирование.– 2014. – Т. 6, № 4. – С. 577–584.

9. *Сапожников Р.А.* Теоретическая фотометрия.– 3-е изд., перераб. и доп. – М.: Энергия, 1977.– 264 с.

10. *Сыромясов А.О., Прытков С.В.* О методах интерполяции на основе фотометрических данных на плоскости / Материалы XI Международной научно-практической конференции «Интеграция науки и практики как механизм эффективного развития современного общества». – Москва, 2014. – С. 13–17.

11. *Сергиенко А.Б.* Цифровая обработка сигналов. – СПб: Питер, 2002.– 608 с.

12. *Скворцов А.В.* Триангуляция Делоне и её применение. – Томск: Изд-во Том. ун-та, 2002.– 128 с.

13. *Дьяконов В.П.* Mathematica 5/6/7. Полное руководство. – М.: ДМК Пресс, 2010.– 624 с.

Прытков Сергей Владимирович, *кандидат. техн. наук. Окончил в 2010 г. Мордовский государственный университет им. Н.П. Огарёва. Доцент кафедры светотехники НИУ «МГУ им. Н.П. Огарёва». Область научных интересов: светотехнические расчёты*

Сыромясов Алексей Олегович, *кандидат физ.-мат. наук, доцент. Окончил в 2004 г. Мордовский государственный университет им. Н.П. Огарёва. Доцент кафедры прикладной математики, дифференциальных уравнений и теоретической механики ФГБОУ ВО «Национальный исследовательский «Мордовский государственный университет им. Н.П. Огарёва». Область научных интересов: математические и компьютерные модели физических и технических процессов*