

# Аналитическое представление взаимосвязи угловой высоты Солнца и местного времени при расчётах естественных облучённости и освещённости на земной поверхности

А. В. ЛЕОНИДОВ

Москва

E-mail: avleonidoff@mail.ru

## Аннотация

Получено аналитическое выражение, описывающее взаимосвязь угловой высоты Солнца с местным временем в произвольной точке земной поверхности в произвольные сутки года. Полученное выражение и следствия из него позволяют вести расчёты естественных облучённости и освещённости на земной поверхности в аналитической форме.

**Ключевые слова:** естественные освещённость и облучённость, земная поверхность, геоцентрическая экваториальная система координат, аналитическая форма представления, угловая высота Солнца, местное время, географические координаты, сутки года.

## Введение

Естественные освещение и облучение земной поверхности (ЗП) оказывают определяющее влияние на характеристики установившихся и неустойчивых зрительных процессов и зрительной работоспособности [1, 2]. Облучённость от Солнца на ЗП управляет циркадианной активностью организма человека.

При исследованиях указанных процессов весьма часто возникает необходимость использования взаимосвязи суточных значений угловой высоты Солнца над горизонтом  $h$  с местным временем в расчётной точке ЗП  $t_{\text{местн}}$  с произвольными значениями географической широты ЗП  $\varphi$  в произвольные  $n$ -е сутки года.

Единственный источник, наиболее полно представляющий эти данные, – уникальное издание [3], содержащее в табличной форме сведения о зависимости  $h$  от времени суток с шагом дискретизации  $\Delta t = 1$  ч для разных суток произвольного года с шагом дискретизации  $\Delta n = 10$  сут и значений  $\varphi = 35\text{--}70^\circ$  с шагом дискретизации  $\Delta\varphi = 5^\circ$ . Табличное представление данных при проведении светотехнических расчётов вызывает необходимость выполнения операций интерполяции внутри и экстраполяции вне использованных в [3] интервалов дискретизации соответственно. Кроме того, табличное представление данных не позволяет вести светотехнические расчёты в аналитической форме, что затрудняет возможности использования полученных результатов и их содержательную интерпретацию.

Практическая недоступность издания [3]<sup>1</sup> и общая тенденция к математической формализации результатов светотехнических исследований определили основную цель статьи, состоящую в аналитическом представлении дан-

ных о взаимосвязи  $h$  и  $t_{\text{местн}}$  в произвольной точке ЗП, необходимой для расчётов в ней естественных облучённости и освещённости.

Ещё одной целью работы, связанной с активным освоением приполярных и полярных зон, явилось расширение диапазона значений  $\varphi$  от экватора до северного и южного полюсов Земли.

## Используемые данные и методы

Суточные и годовые изменения характеристик освещения и облучения ЗП обусловлены множеством пространственных движений Земли, из которых наиболее значимы суточное вращение Земли вокруг своей оси и её перемещение при орбитальном движении вокруг Солнца, характеризующее малым (0,0167) эксцентриситетом земной орбиты (т.е. орбита Земли практически круговая) [4]. Исключение из рассмотрения менее значимых движений (прецессия и нутация земной оси и др.) не вносят сколько-нибудь заметных ошибок в результаты светотехнических расчётов.

Для получения аналитического выражения, связывающего в светлый период суток  $h$  с географическими координатами расчётной точки ЗП и  $t_{\text{местн}}$  для центрального меридиана  $\zeta_{\text{центр}}$  соответствующей ему временной зоны  $N$ , использовалась сферическая модель Земли и геоцентрическая экваториальная система координат 2-го типа [5–7] (рис. 1).

Эта система представляет собой проекцию на условную небесную сферу географических координат ЗП. Плоскость, перпендикулярная главной оси и проходящая через центр Земли, является главной плоскостью – плоскостью небесного экватора, делящей небесную сферу на северное и юж-

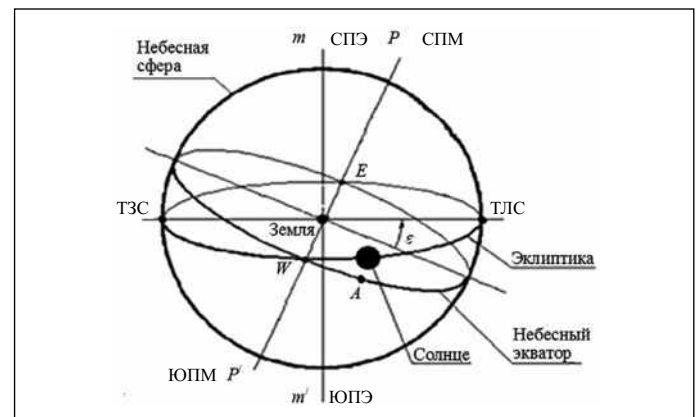


Рис. 1. Геоцентрическая экваториальная система координат 2-го типа [5–7]. СПЭ – северный полюс эклиптики, ЮПЭ – южный полюс эклиптики, СПМ – северный полюс мира, ЮПМ – южный полюс мира, ТЛС – точка летнего солнцестояния, ТЗС – точка зимнего солнцестояния

<sup>1</sup> Правообладателем труда [3], представляющего библиографическую редкость, является Калифорнийский университет (США), что вызывает сомнения в возможности его переиздания в России.

ное небесные полушария и являющейся проекцией земного экватора на небесную сферу. Полноса мира  $P$  и  $P'$  лежат в плоскости небесного меридиана. Ось  $P, P'$  представляет собой главную ось (ось мира), совпадающую с осью вращения Земли. Небесный меридиан представляет собой проекцию на небесную сферу плоскости земного меридиана в расчётной точке ЗП.

Видимое годичное перемещение центра Солнца происходит по эклиптике. Точки  $m$  и  $m'$  являются северным и южным полюсами эклиптики. Угол  $\varepsilon$  между плоскостью эклиптики и плоскостью небесного экватора составляет  $23,45^\circ$  [4]. Эклиптика и небесный экватор пересекаются в двух точках: в точке запада  $W$  (точка весеннего равноденствия) и в точке востока  $E$  (точка осеннего равноденствия). В произвольные сутки года точка, соответствующая текущему расположению центра Солнца, лежит в плоскости небесного меридиана, проходящего через ось мира  $P, P'$ .

Большой круг небесной сферы (круг склонений), представляет собой небесный меридиан, проходящий через центр Солнца и ось мира  $P, P'$  и пересекающий небесный экватор в точке  $A$ . Угловое расстояние между кругом склонения и точкой весеннего равноденствия  $W$ , определяемое вдоль небесного экватора, является прямым восхождением Солнца, измеряемым в единицах времени, а угловое расстояние между центром Солнца и точкой  $A$  на небесном экваторе в круге склонения – склонением Солнца (склонение Солнца положительно к северу от небесного экватора и отрицательно к югу).

Поскольку светотехнические расчёты относятся к поверхности Земли, далее используется время с продолжительностью суток 24 ч [4], а за начало отсчёта времени суток принят момент нижней кульминации Солнца в точке весеннего равноденствия, соответствующий 00 ч 00 мин местного времени выбранной временной зоны. Момент нижней кульминации Солнца в точке весеннего равноденствия принят также в качестве точки, соответствующей началу отсчёта номера суток года.

Для определения зависимости  $h$  от  $t_{\text{местн}}$  удобно использовать проекцию круга склонения Солнца на ЗП, показанную на рис. 2.

Значения  $h$  (без учёта рефракции солнечного излучения) отсчитываются в круге склонения Солнца, соответствующем конкретному числу полных суток, истёкших с момента начала отсчёта времени  $n$ , текущему  $t_{\text{местн}}$  и географическим координатам расчётной точки ЗП.

Для северного полушария Земли, согласно [5–7],

$$h = 90^\circ - \varphi + \varepsilon, \quad (1)$$

а для южного –

$$h = 90^\circ + \varphi - \varepsilon, \quad (2)$$

где  $\varepsilon$  – угол между плоскостью небесного экватора, совпадающего с плоскостью земного экватора, и плоскостью эклиптики.

## Полученные результаты

Малое значение эксцентриситета земной орбиты, обеспечивающее практически постоянную угловую скорость движения Земли относительно Солнца, и изложенные выше допущения, а также выражения (1) и (2) позволяют представить искомую зависимость  $h$  от  $t_{\text{местн}}$  в геоцентри-

ческой экваториальной системе координат в виде суммы или разности двух периодических слагаемых, соответствующих годичному орбитальному движению Земли вокруг Солнца и суточному вращению Земли вокруг своей оси. Для северного и южного полушарий эта зависимость соответственно, имеет вид

$$h(n, \varphi, t_{\text{местн}}) = \varepsilon \sin \Phi(n) - (90^\circ - \varphi) \cos \psi(t_{\text{местн}}), \quad (3)$$

$$h(n, \varphi, t_{\text{местн}}) = -\varepsilon \sin \Phi(n) + (90^\circ + \varphi) \cos \psi(t_{\text{местн}}), \quad (4)$$

где  $\Phi$  – текущая фаза годичного орбитального движения Земли вокруг Солнца,  $\psi$  – текущая фаза суточного вращения Земли вокруг своей оси,  $t_{\text{местн}}$  здесь – это  $t_{\text{местн}}$ , соответствующее нормальному (зимнему) времени для центрального меридиана  $\zeta_{\text{центр}}$  временной зоны  $N$ , в которой расположена расчётная точка ЗП.

Очевидно, в указанных условиях с учётом принятого начала отсчёта времени, соответствующего 00 ч 00 мин суток весеннего равноденствия в северном полушарии Земли, фазы  $\Phi(n)$  и  $\psi(t_{\text{местн}})$  в выражениях (3) и (4) могут быть выражены как  $\Phi(n) = 2\pi n T_{\text{сут}}/T_{\text{год}}$  и  $\psi(t_{\text{местн}}) = 2\pi t_{\text{местн}}/T_{\text{сут}}$ , где  $T_{\text{сут}}$  – продолжительность суток (24 ч) и  $T_{\text{год}}$  – продолжительность года (8760 ч) [4].

Нормальное (зимнее)  $t_{\text{местн}}$  ( $0 \leq t_{\text{местн}} \leq 24$  ч) для центрального меридиана произвольной временной зоны  $N$  ( $0 \leq N \leq 23$ ) описывается как

$$t_{\text{местн}} = UTC + N, \quad (5)$$

где  $UTC$  – всемирное координированное время (*Coordinated Universal Time*).

Наибольший интерес для российских специалистов представляют данные, относящиеся к северному полушарию Земли.

Выражение (3) с учётом приведённых представлений для текущих значений фаз  $\Phi(n)$  и  $\psi(t_{\text{местн}})$  позволяет вычислять зависимости  $h$  от  $t_{\text{местн}}$  для произвольных географических координат ЗП в конкретной временной зоне  $N$ .

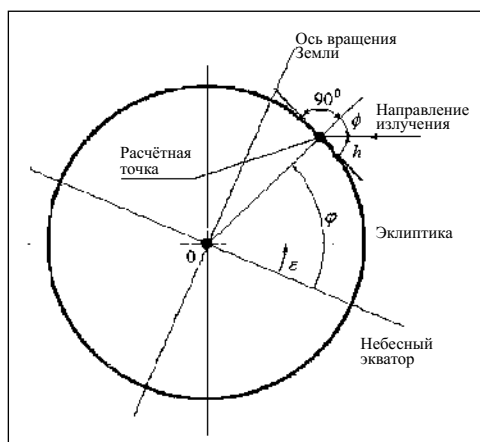
Обратная для функции (3) функция  $t_{\text{местн}}(h)$  в северном полушарии Земли при значениях  $n = 0-365$  и  $\varphi = 0^\circ-90^\circ$ , соответственно, имеет вид

$$t_{\text{местн}}(h) = \begin{cases} \frac{T_{\text{сут}}}{2\pi} \arccos \left[ \frac{1}{(90^\circ - \varphi)} \left( \varepsilon \sin \frac{2\pi n T_{\text{сут}}}{T_{\text{год}}} - h \right) \right] & \text{для} \\ \text{первой половины суток,} \\ \frac{T_{\text{сут}}}{2\pi} \left\{ 2\pi - \arccos \left[ \frac{1}{(90^\circ - \varphi)} \left( \varepsilon \sin \frac{2\pi n T_{\text{сут}}}{T_{\text{год}}} - h \right) \right] \right\} & \text{для второй половины суток.} \end{cases} \quad (6)$$

Из выражения (6) при  $h = 0^\circ$  непосредственно следуют выражения для вычисления  $t_{\text{восх}}$  и  $t_{\text{зах}}$ , а также – продолжительности дня ( $t_{\text{зах}} - t_{\text{восх}}$ ).

Выражение (3) позволяет также вычислять значения  $h$ , соответствующие его верхней ( $t_{\text{местн}} = 12$  ч) и нижней ( $t_{\text{местн}} = 00$  ч) кульминациям,  $h_{\text{кульм верх}}$  и  $h_{\text{кульм нижн}}$ , при произвольных сочетаниях значений  $n$  и  $\varphi$  от 0 до 365 и от  $0^\circ$  до  $90^\circ$  соответственно:

Рис. 2.  
К вычислению  
угловой высоты  
Солнца над  
горизонтом  $h$



$$h_{\text{кульм верх}} = \varepsilon \sin \frac{2\pi n T_{\text{сут}}}{T_{\text{год}}} + (90^\circ - \varphi), \quad (7)$$

$$h_{\text{кульм ниж}} = \varepsilon \sin \frac{2\pi n T_{\text{сут}}}{T_{\text{год}}} + (-90^\circ + \varphi). \quad (8)$$

### Обсуждение результатов

В качестве примера на рис. 3 приведены зависимости  $h$  от  $t_{\text{местн}}$  по выражению (3) при разных значениях  $\varphi$  в сутки летнего солнцестояния ( $n = 91$ ), в сутки весеннего ( $n = 0$ ) и осеннего ( $n = 182$ ) равноденствий и в сутки зимнего солнцестояния ( $n = 273$ ).

Проекции узлов семейства графиков на рис. 3 на ось  $t_{\text{местн}}$  соответствуют  $t_{\text{восх}}$  и  $t_{\text{зах}}$  на  $\varphi = 23,45^\circ$  в сутки весеннего и осеннего равноденствий.

Точки пересечения этих графиков с осью  $t_{\text{местн}}$  соответствуют  $t_{\text{восх}}$  и  $t_{\text{зах}}$  для центрального меридиана рассматриваемой временной зоны  $N$  и полностью соответствуют значениям, вычисляемым по выражениям (6) при  $h = 0^\circ$ .

В северном полушарии в сутки зимнего солнцестояния увеличение  $\varphi$  с  $00,00^\circ$  до  $90,00^\circ$  в выражении (7) приводит к уменьшению максимальных суточных значений  $h$  с  $66,55^\circ$  до  $-23,45^\circ$ . В северном полушарии в сутки весеннего [ $n = 0$  (21 марта)] или осеннего [ $n = 182$  (22 сентября)] равноденствий, в сутки летнего [ $n = 91$  (22 июня)] и зимнего [ $n = 273$  (22 декабря)] солнцестояний увеличение  $\varphi$  расчётной точки ЗП в выражении (7) с  $00,00^\circ$  до  $90,00^\circ$  приводит к уменьшению максимальных значений  $h$  с  $90,00^\circ$  до  $00,00^\circ$ , со  $113,45^\circ$  до  $23,45^\circ$  и с  $66,55^\circ$  до  $-23,45^\circ$  соответственно.

Сопоставление результатов вычислений по выражениям (3), (4), (6)–(8) показывает их полное совпадение с данными [3]. Они также полностью соответствуют описаниям движения и текущего положения Солнца на условной небесной сфере, согласно [5, 7].

Аналогичные результаты могут быть получены по приведённым выше выражениям при любых значениях  $\varphi$  в северном и южном полушариях Земли в произвольные сутки года.

### Заключение

Результаты работы позволяют формализовать и в значительной мере упростить проведение расчётов естественных облучённости и освещённости на ЗП, обеспечить возможность установления в аналитической форме влия-

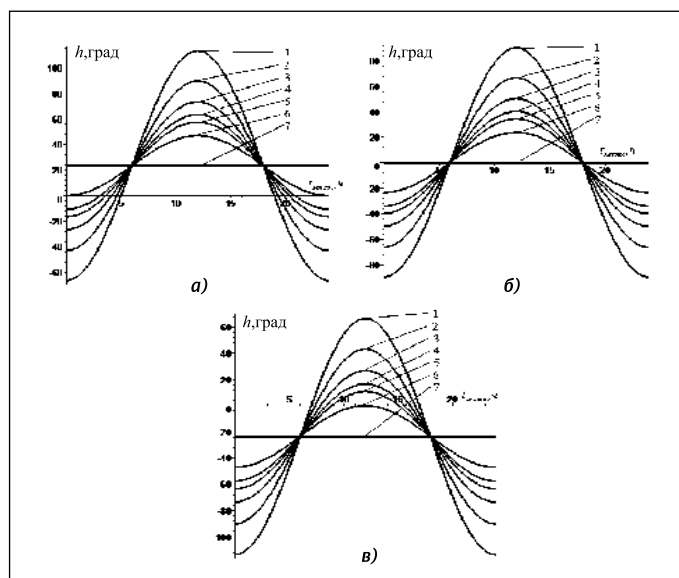


Рис. 3. Зависимости угловой высоты Солнца над горизонтом  $h$  от местного времени  $t_{\text{местн}}$  и географической широты расчётной точки земной поверхности  $\varphi$ :

$a - n = 91$  (22 июня),  $b - n = 0$  (21 марта) и  $n = 182$  (22 сентября),  $c - n = 273$  (22 декабря);  $\varphi = 00,00^\circ$  (1),  $23,45^\circ$  (2),  $40,00^\circ$  (3),  $50,00^\circ$  (4),  $55,90^\circ$  (5),  $66,55^\circ$  (6),  $90,00^\circ$  (7)

ния солнечного излучения на характеристики разного рода зрительных процессов, зрительной работоспособности и циркадианной активности организма человека. Кроме того, результаты работы могут быть использованы и в других областях человеческой деятельности: например, в архитектуре, в биофизических исследованиях, в исследованиях солнечно-земных связей и геофизических процессов, в климатологии.

### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Мешков В.В., Матвеев А.Б. Основы светотехники: Учеб. пособие для вузов: В 2-х ч. Ч. 2. Физиологическая оптика и колориметрия. – 2-е изд., перераб. и доп. – М.: Энергоатомиздат, 1989. – 432 с.
2. Кравков С.В. Глаз и его работа. Психофизиология зрения, гигиена освещения. – 4-е изд., перераб. и доп. – М.-Л.: Изд-во АН СССР, 1950. – 531 с.
3. Таблицы для расчёта природной освещённости и видимости / Составлены Астрофиз. лаб. Ленинградского ун-та под рук. проф. В.В. Шаронова. – М.-Л.: Изд-во АН СССР, 1945. – 199 с.
4. Аллен К.У. Астрофизические величины (Справочник). Пер. с англ. – М.: Мир, 1977. – 279 с.
5. Кононович Э.В., Мороз В.И. Общий курс астрономии: Учеб. пособие / Под ред. В.В. Иванова. Изд. 2-е, испр. – М.: Едиториал УРСС, 2004. – 544 с.
6. Цесевич В.П. Что и как наблюдать на небе. Руководство к организации и проведению любительских наблюдений небесных тел. Изд. 6-е, перераб. – М.: Наука, 1984. – 304 с.
7. Клищенко А.П., Шупляк В.И. Астрономия: Учеб. пособие для вузов. – М.: Новое знание, 2004. – 224 с.



**Леонидов Александр Вячеславович,**  
кандидат техн. наук. Окончил в 1970 г. МЭИ по специальности «Светотехника и источники света»