

# Природа фотона и квантовая оптика

Б.А. ВЕКЛЕНКО

Объединённый институт высоких температур (ОИВТ) РАН, г. Москва  
E-mail: veklenkoba@yandex.ru

*Всё должно быть сделано настолько простым,  
насколько возможно, но не проще.  
А. Эйнштейн.*

## Аннотация

В сжатой, но доступной для первоначального ознакомления форме изложена процедура квантования линейного осциллятора. По аналогии с этой процедурой изложена процедура квантования (вторичное квантование) классической максвелловской электродинамики. Выяснен физический смысл аргументов волновой функции поперечного электромагнитного поля и её образа Фурье. Уделено внимание как квантовым когерентным (почти классическим) состояниям электромагнитного поля, так и фотонным (фоковским) состояниям. Обращено внимание на факт отсутствия универсального содержания таких понятий, как амплитуда поля, фаза, а также число частиц (фотонов), используемых экспериментаторами для описания состояний квантованного поля. Изложено полуколичественное рассмотрение процессов взаимодействия квантованного электромагнитного поля с веществом. Указаны ситуации, в которых расхождение предсказаний классической и квантовой электродинамик заметно на макроскопическом уровне.

**Ключевые слова:** классическая электродинамика, квантовая электродинамика, квантовые когерентные состояния, фоковские состояния, фотон

## 1. Введение

Около ста лет назад известный французский физик Л. де Бройль (1892–1987) задался целью описать дифракционные и интерференционные свойства фотона, существование которого было теоретически предсказано М. Планком (1858–1947) в 1905 году. В основу своей теории [1] де Бройль положил известные в то время уравнения  $E = \hbar \omega$  и  $E = mc^2$ . Такой путь привёл его к выводу о существовании у фотона пусть малой, но конечной массы  $m$ . Но осталось неясным, в чём заключаются принципиальные отличия фотона от других «массивных» элементарных частиц. И тогда де Бройлю пришла в голову гениальная мысль: если принципиального отличия между частицами нет, то, наоборот, все «массивные частицы», как и фотон, должны обладать волновыми свойствами. Так была построена квантовая механика частиц, обладающих конечной массой. Но свою сформулированную выше первоначальную задачу де Бройль не выполнил. Теория фотона, обладающего как корпускулярными, так и волновыми свойствами, была построена позднее, спустя пять лет, трудами других учёных. Эта теория оказалась достаточно богатой и сложной, потребовавшей усилий нескольких человек. Ниже в элементарном изложении приводятся её основные концепции.

Представление о свете и его внутренней структуре по мере развития научных знаний претерпевало драматические изменения. Понятие «луч света» имеет древнее происхождение. Известны два автора закона преломления: В. Снеллиус (1580–1626) и Р. Декарт (1596–1650). Работами Х. Гюйгенса (1629–1695), Р. Гука (1635–1703) и частично И. Ньютона (1643–1727) была вскрыта волновая природа света. Но датой становления этой теории следует считать 1865 год, когда Дж.К. Максвелл (1831–1879) вывел из своей теории электричества и магнетизма заключение о существовании электромагнитных волн. Описываемые электрической  $E^v(\mathbf{r}, t)$  и магнитной  $H^v(\mathbf{r}, t)$  напряжённостями, заданными в каждой точке пространства  $\mathbf{r}$  в любой момент времени  $t$ , эти волны прекрасно количественно описывают интерференцию, дифракцию и поляризацию света. Но в вопросах излучения и поглощения света возникают трудности.

Исследуя этот вопрос, первоначально из термодинамических соображений, а затем разрабатывая гипотезу Л. Больцмана (1844–1906) о неизбежности в природе скачкообразных процессов, М. Планк ввёл в теорию понятие «фотон», что было доложено им на заседании Немецкого физического общества 14 декабря 1905 года. Введение фотона сделало возможным понимание атомных явлений. О свойствах самого фотона до конца двадцатых годов прошлого столетия фактически не было известно ничего, кроме выражений для его энергии  $\hbar \omega$  ( $\omega$  – частота) и импульса  $\hbar \mathbf{k}$  ( $\mathbf{k}$  – волновой вектор). Как только речь заходила о фотонах, приходилось забывать об атрибутах теории Максвелла  $E^v(\mathbf{r}, t)$  и  $H^v(\mathbf{r}, t)$ . Так вошла в теорию постоянная Планка  $\hbar = 1,05 \cdot 10^{-27}$  эрг·с. Относительно скоро стало понятно, что эта постоянная применима не только к свету, но и к телам конечной массы.

Трудами в первую очередь Н. Бора (1885–1962), Л. де Бройля, В. Гейзенберга (1901–1976) и Э. Шрёдингера (1887–1961) была построена квантовая механика частиц конечной массы. Именно эта теория указала путь и необходимость построения последовательной квантовой теории оптических явлений, что непосредственно следует из определения напряжённости  $E^v(\mathbf{r}, t)$  как силы, действующей со стороны поля на единичный точечный заряд. В квантовой теории любое заряженное тело описывается волновой функцией, понятие локализации размывается. Вместе с ним размывается и классическое понятие напряжённости поля. Квантовая теория электромагнитного поля была построена в трудах П. Дирака (1902–1984), В. Гейзенберга, В. Паули (1900–1958), П. Иордана (1902–1980) и Э. Ферми (1901–1954) в период с 1927 по 1930 г. В этой теории сочетаются классические (волновые) и квантовые (корпускулярные) свойства фотонов. На вопрос «Что такое фотон?» эта теория даёт чёткий ответ: «Фотон – это электромагнитный объект, описываемый свойственной ему волновой функцией». Явный вид волновой функции хорошо известен, тогда как с её интерпретацией

дело обстоит сложнее. Здесь сохраняются все проблемы, свойственные волновой функции квантовой механики частиц конечной массы, нередко обсуждаемые по сегодняшний день [2]. Но при этом появляются и дополнительные вопросы касательно методов её расчёта. Несмотря на то, что в настоящее время такая теория хорошо развита, в инженерной практике она не нашла ещё своего применения.

Настоящий обзор ставит целью ввести читателя в нетривиальный круг идей квантовой теории электромагнитного поля. Хочется верить, что если читатель с карандашом в руке просмотрит предлагаемый обзор более одного раза, то это существенно облегчит ему в дальнейшем знакомство с толстыми учебными пособиями [3] на предлагаемую тему.

## 2. Классическое электромагнитное поле и квантовый осциллятор

Согласно уравнениям Максвелла, электромагнитные волны, характеризующие распространение света в вакууме, могут быть описаны путём введения векторного потенциала  $A^v(\mathbf{r}, t)$ , удовлетворяющего волновому уравнению [4]:

$$\nabla^2 A^v(\mathbf{r}, t) - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} A^v(\mathbf{r}, t) = 0 \quad (1)$$

Вместо векторного потенциала традиционно используют векторы

$$E^v(\mathbf{r}, t) = -\frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} A^v(\mathbf{r}, t) \text{ и } H^v(\mathbf{r}, t) = \text{rot} A^v(\mathbf{r}, t). \quad (2)$$

Решение уравнения (1) можно представить в виде суперпозиции плоских волн:

$$A^v(\mathbf{r}, t) = \sum_{k\lambda} e_{k\lambda}^v \gamma_k \left( \alpha_{k\lambda} e^{i\mathbf{k}\mathbf{r} - i\omega_k t} + \alpha_{k\lambda}^* e^{-i\mathbf{k}\mathbf{r} + i\omega_k t} \right), \quad (3)$$

где  $\mathbf{k}$  – волновой вектор с компонентами  $\{k_x, k_y, k_z\}$ ,  $\alpha_{k\lambda}$  – безразмерные постоянные, зависящие от длины волны  $\tilde{\lambda} = 2\pi/k$  и индекса поперечной ( $(\mathbf{k}e_{k\lambda}) = 0$ ) поляризации  $\lambda = 1, 2$ . Через  $e_{k\lambda}^v$  обозначены единичные векторы, перпендикулярные направлению распространения волны, то есть вектору  $\mathbf{k}$ . Далее,  $c$  – скорость света в вакууме, а вещественные, обладающие размерностью векторного потенциала функции  $\gamma_k$  введены для удобства дальнейшего рассмотрения. Если положить  $\alpha_{k\lambda} = |\alpha_{k\lambda}| \exp(i\mathcal{G}_{k\lambda})$ , то получим:

$$A^v(\mathbf{r}, t) = \sum_{k\lambda} e_{k\lambda}^v A_{k\lambda} \cos(\mathbf{k}\mathbf{r} - \omega_k t + \mathcal{G}_{k\lambda}), \quad A_{k\lambda} = 2|\alpha_{k\lambda}| \gamma_k. \quad (4)$$

Согласно (4), классические электромагнитные волны описываются путём внесения в каждую точку пространства  $\mathbf{r}$  классического осциллятора, совершающего гармонические колебания  $A_{k\lambda} \cos(\mathbf{k}\mathbf{r} - \omega_k t + \mathcal{G}_{k\lambda})$  с частотой  $\omega_k = kc$ . Это наводит на мысль, что при описании квантовой электромагнитной волны классические осцилляторы должны быть заменены на квантовые.

Напомним, что под классическим осциллятором понимается материальная точка с массой  $m$ , координата которой  $x(t)$  под действием упругой силы  $f(t) = -\chi x(t)$  совершает гармонические колебания с частотой  $\omega$ . Из закона Ньютона  $m(d^2/dt^2)x(t) = -\chi x(t)$  следует, что

$$x(t) = x_0 \cos(\omega t + \mathcal{G}) \text{ при } \omega = \sqrt{\chi/m}.$$

Как строится квантовая теория осциллятора? В квантовой теории на смену координате материальной классической точки  $x$  и её импульсу  $p$  приходят операторы  $x \rightarrow \hat{x} \equiv x$ ,  $p \rightarrow \hat{p} = -i\hbar \partial / \partial x$ . При такой замене выражение для полной энергии  $E$  классической точки заменяется операторным выражением, носящим название оператор полной энергии  $\hat{H}$  или «гамильтониан»:

$$E = \frac{p^2}{2m} + \frac{\chi}{2} x^2 = \frac{p^2}{2m} + \frac{m\omega^2}{2} x^2 \rightarrow -\frac{\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{m\omega^2}{2} x^2 = \hat{H}.$$

В квантовой механике состояние квантовой частицы описывает волновая функция  $\psi(x)$ , подчиняющаяся уравнению, носящему имя Э. Шрёдингера:

$$\left( -\frac{\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{m\omega^2}{2} x^2 \right) \psi(x) = E\psi(x) \text{ или} \quad (5)$$

$$\hat{H}\psi(x) = E\psi(x).$$

Квадрат волновой функции  $\psi^*(x)\psi(x)dx$  определяет вероятность обнаружения классической координаты частицы в интервале  $dx$ , окружающем точку  $x$ , если такой эксперимент будет поставлен. Поэтому

$$\int_{-\infty}^{\infty} \psi^*(x)\psi(x)dx = 1.$$

Выпишем несколько формальных свойств квантового осциллятора [5]. После замены переменных

$$\zeta = x\beta, \quad \beta = \sqrt{\frac{\omega m}{\hbar}}, \quad \lambda = \frac{2E}{\hbar\omega}$$

уравнение Шрёдингера (5) принимает вид:

$$\left( \zeta^2 - \frac{d^2}{d\zeta^2} \right) \psi(\zeta) = \lambda \psi(\zeta),$$

Разумеется, вместо  $\psi(\zeta)$  можно было бы использовать запись  $\psi(x\sqrt{\omega m/\hbar})$ , но это неудобно. Выражение в скобках напоминает алгебраическую разность квадратов. Поэтому представляется естественным использование операторов

$$\hat{\alpha} = \frac{1}{\sqrt{2}} \left( \zeta + \frac{\partial}{\partial \zeta} \right), \quad \hat{\alpha}^+ = \frac{1}{\sqrt{2}} \left( \zeta - \frac{\partial}{\partial \zeta} \right).$$

Посредством этих операторов уравнение Шрёдингера переписывается в виде

$$\frac{\hbar\omega}{2} (\hat{\alpha}^+ \hat{\alpha} + \hat{\alpha} \hat{\alpha}^+) \psi(\zeta) = E \psi(\zeta), \quad \hat{H} = \frac{\hbar\omega}{2} (\hat{\alpha}^+ \hat{\alpha} + \hat{\alpha} \hat{\alpha}^+). \quad (6)$$

При дополнительном условии  $\int_{-\infty}^{\infty} \psi^*(\zeta) \psi(\zeta) d\zeta = 1$  это уравнение имеет много решений, определяемых индексом  $n = 0, 1, 2, \dots$ . Обозначим эти решения через  $\varphi(\zeta|n)$ :

$$\varphi(\zeta|n) = H_n(\zeta) e^{-\frac{\zeta^2}{2}}, \quad H_n(\zeta) = \frac{(-1)^n}{\sqrt{2^n n! \sqrt{\pi}}} e^{\zeta^2} \frac{d^n}{d\zeta^n} e^{-\zeta^2}. \quad (7)$$

Функция  $H_n(\zeta)$  носит название полиномов Эрмита. Каждому решению  $\varphi(\zeta|n)$  соответствует своё значение параметра  $E$ :  $E_n = \hbar\omega(n + 1/2)$ , определяющего дозволённые дискретные значения энергии осциллятора, если на него не действуют внешние силы. Функции (7) оказываются вещественными и обладающими следующими свойствами:

$$\begin{aligned} \hat{\alpha} \varphi(\zeta|n) &= \sqrt{n} \varphi(\zeta|n-1), \\ \hat{\alpha}^+ \varphi(\zeta|n) &= \sqrt{n+1} \varphi(\zeta|n+1), \quad \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(\zeta|n) \varphi(\zeta|n') d\zeta = \delta_{nn'}. \end{aligned} \quad (8)$$

Из этих равенств следует, что

$$\hat{\alpha}^+ \hat{\alpha} \varphi(\zeta|n) = n \varphi(\zeta|n).$$

Оператор  $\hat{n} = \hat{\alpha}^+ \hat{\alpha}$  носит наименование оператора числа. В дальнейшем с его помощью будет построен оператор числа фотонов. Если волновая функция  $\psi(\zeta)$  не совпадает ни с какой из  $\varphi(\zeta|n)$ , то число фотонов в этом состоянии не имеет точного значения, и можно говорить только об их усреднённом квантовом числе  $\langle \hat{n} \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} \psi^*(\zeta) \hat{n} \psi(\zeta) d\zeta$ .

В общем случае, если на осциллятор действуют внешние силы, то волновая функция может существенно зависеть от времени. Вместо уравнения (5) её поведение теперь определяет временное уравнение Шрёдингера:

$$i\hbar \frac{\partial \Psi(x,t)}{\partial t} = \hat{H} \Psi(x,t).$$

### 3. Процедура квантования электромагнитного поля

Будем говорить, что некоторый набор параметров описывает состояние материального объекта в некоторый момент времени  $t = 0$ , если этот набор достаточен для предсказания результатов любого потенциально возможного эксперимента, проводимого над объектом в любой последующий момент времени  $t > 0$ . В классической механике

состояние точечной частицы в одномерном случае описывается координатой  $x$  и импульсом  $p$ . При переходе от классической механики к квантовой координата частицы и импульс заменяются соответствующими операторами. Аналогичная ситуация возникает и в теории поля. В классической теории электромагнитного поля состояние поля определяет его амплитуда  $A^v(\mathbf{r}, t)$ . Это означает, что при переходе от классической оптики к квантовой амплитуда поля должна быть заменена на операторное выражение. Состояние любой системы в квантовой теории описывает волновая функция  $\psi$ , удовлетворяющая уравнению Шрёдингера. Явный вид гамильтониана в этом уравнении будет подсказан процедурой квантования классического осциллятора с заменой энергии электромагнитного поля его квантовым аналогом. В классической физике энергия плоских электромагнитных волн, занимающих объём  $V$ , описывается формулой:

$$E = \int_V \frac{E^2(\mathbf{r}, t)}{8\pi} d\mathbf{r} + \int_V \frac{H^2(\mathbf{r}, t)}{8\pi} d\mathbf{r} = \int_V \frac{E^2(\mathbf{r}, t)}{4\pi} d\mathbf{r}.$$

Здесь учтено, что у плоских электромагнитных волн энергии, приходящиеся на электрическую и магнитную компоненты, равны между собой. Будем считать, что электромагнитное поле занимает куб с ребром  $L$  и объёмом  $V = L^3$ . На границах куба используем периодические граничные условия  $\exp(ik_x L) = \exp(ik_y L) = \exp(ik_z L) = 1$ . В таком случае, используя (2) и (3), получаем:

$$E = \sum_{k\lambda} \frac{V \omega_k^2}{4\pi c^2} \gamma_k^2 (\alpha_{k\lambda}^* \alpha_{k\lambda} + \alpha_{k\lambda} \alpha_{k\lambda}^*), \quad \omega_k = ck. \quad (9)$$

Такая форма записи энергии подчёркивает её вещественность. Переход к бесконечному объёму осуществляется процедурой  $V \rightarrow \infty$ . Сопоставление выражений (6) и (9) указывает на то, что при процедуре квантования надлежит провести замену

$$\begin{aligned} \gamma_k &\rightarrow \sqrt{\frac{2\pi\hbar c^2}{\omega_k V}}, \quad \alpha_{k\lambda} \rightarrow \hat{\alpha}_{k\lambda} = \frac{1}{\sqrt{2}} \left( \zeta_{k\lambda} + \frac{\partial}{\partial \zeta_{k\lambda}} \right), \\ \alpha_{k\lambda}^* &\rightarrow \hat{\alpha}_{k\lambda}^+ = \frac{1}{\sqrt{2}} \left( \zeta_{k\lambda} - \frac{\partial}{\partial \zeta_{k\lambda}} \right). \end{aligned} \quad (10)$$

При этом векторный потенциал (3) и полная энергия поля (9) заменяются операторными выражениями

$$\begin{aligned} \hat{A}^v(\mathbf{r}, t) &= \sum_{k\lambda} e_{k\lambda}^v \gamma_k (\hat{\alpha}_{k\lambda}^{ikr-ikt} + \hat{\alpha}_{k\lambda}^+ e^{-ikr+ikt}), \\ \hat{H} &= \sum_{k\lambda} \frac{\hbar\omega_k}{2} (\hat{\alpha}_{k\lambda}^+ \hat{\alpha}_{k\lambda} + \hat{\alpha}_{k\lambda} \hat{\alpha}_{k\lambda}^+). \end{aligned} \quad (11)$$

Вид уравнения Шрёдингера, содержащего этот оператор  $\hat{H}$  (гамильтониан), был приведён выше:  $\hat{H} \psi(\zeta) = E \psi(\zeta)$ . Решением этого уравнения является произведение функций

$$\varphi(\zeta|N) = \prod_{k\lambda} \varphi(\zeta_{k\lambda}|n_{k\lambda}),$$

$$E_{k\lambda} = \hbar\omega_k \left( n_{k\lambda} + \frac{1}{2} \right), E = \sum_{k\lambda} E_{k\lambda}.$$

Здесь многомерный вектор  $\zeta$  означает набор аргументов  $\zeta_{k\lambda}$  с различными  $(\mathbf{k}, \lambda)$ , многомерный вектор  $\mathbf{N}$  означает набор чисел  $n_{k\lambda}$ . Функция  $\varphi(\zeta_{k\lambda}|n_{k\lambda})$  удовлетворяет уравнению

$$\frac{\hbar\omega_k}{2} (\hat{\alpha}_{k\lambda}^+ \hat{\alpha}_{k\lambda} + \hat{\alpha}_{k\lambda} \hat{\alpha}_{k\lambda}^+) \varphi(\zeta_{k\lambda}|n_{k\lambda}) = E_{k\lambda} \varphi(\zeta_{k\lambda}|n_{k\lambda}).$$

Каждому решению  $\varphi(\zeta_{k\lambda}|n_{k\lambda})$  отвечает энергия  $E_{k\lambda} = \hbar\omega_k (n_{k\lambda} + 1/2)$ . Поскольку нас всегда интересует разность энергий

$$E - \sum_{k\lambda} \hbar\omega_k / 2 = \sum_{k\lambda} \hbar\omega_k n_{k\lambda}, \quad (12)$$

то на сумму  $\sum_{k\lambda} \hbar\omega_k / 2$  можно не обращать внимания. Сумма в левой части равенства (12) представляет собой энергию полного электромагнитного поля, отвечающую конкретному набору чисел  $n_{k\lambda}$ , то есть конкретному набору фотонов, каждый из которых обладает энергией  $\hbar\omega_k$ . Таким образом,  $n_{k\lambda}$  означает число фотонов в моде  $(\mathbf{k}, \lambda)$ .

Итак, фотоном ( $n_{k\lambda} = 1$ ) моды  $(\mathbf{k}, \lambda)$  называется такое состояние электромагнитного поля, которому отвечает волновая функция

$$\varphi(\zeta_{k\lambda}|1) = H_1(\zeta_{k\lambda}) \exp(-\zeta_{k\lambda}^2 / 2) = \sqrt{2\pi}^{-1/4} \zeta_{k\lambda} \exp(-\zeta_{k\lambda}^2 / 2). \quad (13)$$

Это и есть ответ на вопрос, вынесенный в заглавие статьи. В неограниченном пространстве такие состояния в чистом виде существовать не могут, так же как в классической физике не могут существовать строго монохроматические волны. Это невозможно просто потому, что монохроматические волны не имеют границ. Но исследование их свойств чрезвычайно плодотворно, поскольку любое реально существующее электромагнитное поле может быть представлено в виде их суперпозиции. Таким же свойством обладают фотонные состояния. Из них, как из кирпичиков, может быть построено любое реально существующее состояние поля.

Чтобы понять физический смысл функции (13), необходимо выяснить физический смысл аргументов  $\zeta_{k\lambda}$ . Процедура квантования поля в соответствии с (10) требует замены

$$\frac{\alpha_{k\lambda} + \alpha_{k\lambda}^*}{\sqrt{2}} = \frac{A_{k\lambda}}{\gamma_k \sqrt{2}} \cos \vartheta_{k\lambda} \rightarrow \zeta_{k\lambda},$$

$$\frac{\alpha_{k\lambda} - \alpha_{k\lambda}^*}{\sqrt{2}} = i \frac{A_{k\lambda}}{\gamma_k \sqrt{2}} \sin \vartheta_{k\lambda} \rightarrow \frac{\partial}{\partial \zeta_{k\lambda}}. \quad (14)$$

Аргумент волновой функции  $\zeta_{k\lambda}$  отвечает «классической» величине  $A_{k\lambda} \cos \vartheta_{k\lambda} / \gamma_k \sqrt{2}$ . Слово «классический» мы берём в кавычки, поскольку  $\gamma_k$  содержит  $\hbar$ . Разумеется, можно было бы использовать запись  $\varphi(A_{k\lambda} \cos \vartheta_{k\lambda} / \gamma_k \sqrt{2} | n_{k\lambda})$ , но это неудобно, поэтому пишут  $\varphi(\zeta_{k\lambda} | n_{k\lambda})$ . Согласно квантовым принципам, конструкция  $|\varphi(\zeta_{k\lambda} | n_{k\lambda})|^2 d\zeta_{k\lambda}$  определяет вероятность обнаружения аргумента  $\zeta_{k\lambda}$  (или «классической» конструкции  $A_{k\lambda} \cos \vartheta_{k\lambda} / \gamma_k \sqrt{2}$ ) в интервале  $d\zeta_{k\lambda}$ , если такой эксперимент будет поставлен. Таким образом, находится функция распределения «классической» переменной  $A_{k\lambda} \cos \vartheta_{k\lambda} / \gamma_k \sqrt{2}$ .

Рассмотрим преобразование Фурье (индексы  $k, \lambda$  опускаем)

$$\varphi(\zeta) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\eta\zeta} \tilde{\varphi}(\eta) d\eta \quad \tilde{\varphi}(\eta) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\eta\zeta} \varphi(\zeta) d\zeta.$$

Из свойств преобразования Фурье следует, что этой процедуре сопутствуют замены

$$\varphi(\zeta) \leftrightarrow \tilde{\varphi}(\eta), \quad \zeta \leftrightarrow i \frac{\partial}{\partial \eta}, \quad -i \frac{\partial}{\partial \zeta} \leftrightarrow \eta.$$

Следовательно, вместо (14) правилами квантования электромагнитного поля могут служить следующие:

$$\frac{\alpha_{k\lambda} + \alpha_{k\lambda}^*}{\sqrt{2}} = \frac{A_{k\lambda}}{\gamma_k \sqrt{2}} \cos \vartheta_{k\lambda} \rightarrow i \frac{\partial}{\partial \eta_{k\lambda}},$$

$$\frac{\alpha_{k\lambda} - \alpha_{k\lambda}^*}{\sqrt{2}} = i \frac{A_{k\lambda}}{\gamma_k \sqrt{2}} \sin \vartheta_{k\lambda} \rightarrow i \eta_{k\lambda}. \quad (15)$$

Таким образом, аргументу функции  $\tilde{\varphi}(\eta_{k\lambda})$  отвечает классическая величина  $A_{k\lambda} \sin \vartheta_{k\lambda} / \gamma_k \sqrt{2}$ . Конструкция  $|\tilde{\varphi}(\eta_{k\lambda})|^2$  определяет распределение вероятности «классической» величины  $A_{k\lambda} \sin \vartheta_{k\lambda} / \gamma_k \sqrt{2}$ . Поскольку функция  $\tilde{\varphi}(\eta_{k\lambda})$  получают из  $\varphi(\zeta_{k\lambda})$  при помощи преобразования Фурье, то согласно (13)

$$\tilde{\varphi}(\eta_{k\lambda}|1) = i \sqrt{2\pi}^{-1/4} \eta_{k\lambda} \exp(-\eta_{k\lambda}^2 / 2).$$

Итак, для однофотонных состояний имеем:

$$|\varphi(\zeta_{k\lambda}|1)|^2 = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \zeta_{k\lambda}^2 \exp(-\zeta_{k\lambda}^2),$$

$$|\tilde{\varphi}(\eta_{k\lambda}|1)|^2 = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \eta_{k\lambda}^2 \exp(-\eta_{k\lambda}^2).$$

Это чётные функции своих аргументов, поэтому квантовые средние

$$\langle \zeta_{k\lambda} \rangle = \langle \eta_{k\lambda} \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} \zeta_{k\lambda} |\varphi(\zeta_{k\lambda})|^2 d\zeta_{k\lambda} = \int_{-\infty}^{\infty} \eta_{k\lambda} |\tilde{\varphi}(\eta_{k\lambda})|^2 d\eta_{k\lambda} = 0$$

обращаются в ноль. Другими словами, в однофотонных состояниях квантовые средние

$$\langle A_{k\lambda} \cos \mathcal{G}_{k\lambda} \rangle = \langle A_{k\lambda} \sin \mathcal{G}_{k\lambda} \rangle = 0$$

обращаются в ноль. По этой причине классическими параметрами  $A_{k\lambda}$  и  $\mathcal{G}_{k\lambda}$  такие однофотонные состояния описаны быть не могут. Подчеркнём отдельно и ещё раз, что однофотонные состояния электромагнитного поля классическими атрибутами, такими как амплитуда  $A_{k\lambda}$  и фаза  $\mathcal{G}_{k\lambda}$ , не обладают.

Но такое свойство присуще не только однофотонным состояниям, но и любым состояниям с точно определённым числом фотонов (фоковские состояния). Действительно, при усреднении по любому состоянию, определяемому функцией  $\varphi(\zeta_{k\lambda} | n_{k\lambda})$ , квантовое среднее векторного потенциала (11)

$$\langle \hat{A}^v(\mathbf{r}, t) \rangle = \sum_{k\lambda} e_{k\lambda}^v \gamma_k \left( \langle \hat{\alpha}_{k\lambda} \rangle e^{ikr - ikt} + \langle \hat{\alpha}_{k\lambda}^+ \rangle e^{-ikr + ikt} \right) = 0$$

обращается в ноль, что следует из соотношений (8). Но квантовые средние  $\langle \hat{A}^v(\mathbf{r}, t) \rangle$  могут не обращаться в ноль, если мы имеем дело с суперпозицией волновых функций с различными числами  $n_{k\lambda}$ . Именно среди таких суперпозиций надо искать волновую функцию, описывающую квантовое состояние, наиболее близко аппроксимирующее классическое поле. Такой суперпозицией является (вновь опускаем индексы  $k, \lambda$ ):

$$\varphi(\zeta | \alpha) = e^{-\frac{|\alpha|^2}{2}} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\alpha^n}{\sqrt{n!}} \varphi(\zeta | n),$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \varphi^*(\zeta | \alpha) \varphi(\zeta | \alpha) d\zeta = 1,$$

где  $\alpha$  – любое число. Принято говорить, что эта суперпозиция описывает «квантовое когерентное» состояние.

Нетрудно видеть, что  $\hat{\alpha} \varphi(\zeta | \alpha) = \alpha \varphi(\zeta | \alpha)$ . Если оператор  $\hat{\alpha}$  расписать в явном виде (10), то получается уравнение

$$\frac{1}{\sqrt{2}} \left( \zeta + \frac{\partial}{\partial \zeta} \right) \varphi(\zeta | \alpha) = \alpha \varphi(\zeta | \alpha),$$

решением которого служит функция

$$\varphi(\zeta | \alpha) = \pi^{-1/4} \exp \left[ -\frac{(\alpha + \alpha^*)^2}{4} + \sqrt{2} \alpha \zeta - \frac{1}{2} \zeta^2 \right]. \quad (16)$$

При работе с квантовыми когерентными состояниями оказывается полезным следующий интеграл:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \exp(\delta \zeta - \beta \zeta^2) d\zeta = \sqrt{\frac{\pi}{\beta}} \exp \left( \frac{\delta^2}{4\beta} \right).$$

Теперь ясно, что  $\int_{-\infty}^{\infty} \varphi^*(\zeta | \alpha) \varphi(\zeta | \alpha) d\zeta = 1$ .

Воспользуемся преобразованием Фурье

$$\tilde{\varphi}(\eta | \alpha) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\eta \zeta} \varphi(\zeta | \alpha) d\zeta =$$

$$= \pi^{-1/4} \exp \left[ -\frac{(\alpha + \alpha^*)^2}{4} + \alpha^2 - i\sqrt{2} \alpha \eta - \frac{1}{2} \eta^2 \right]. \quad (17)$$

Из (16) и (17) следует, что

$$|\varphi(\zeta | \alpha)|^2 = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \exp \left[ -\left( \zeta - \frac{\alpha + \alpha^*}{\sqrt{2}} \right)^2 \right],$$

$$|\tilde{\varphi}(\eta | \alpha)|^2 = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \exp \left[ -\left( \eta - \frac{\alpha - \alpha^*}{i\sqrt{2}} \right)^2 \right]. \quad (18)$$

Если воспользоваться представлениями  $\alpha = |\alpha| \exp(i\vartheta)$  и  $\alpha^* = |\alpha| \exp(-i\vartheta)$ , то для наимвероятнейших значений  $\zeta_{ex}$  и  $\eta_{ex}$  согласно (14) и (15) будем иметь:

$$\zeta_{ex} = \left( A \cos \vartheta / \gamma_k \sqrt{2} \right)_{ex} = \frac{\alpha + \alpha^*}{\sqrt{2}} = \sqrt{2} |\alpha| \cos \vartheta,$$

$$\eta_{ex} = \left( A \sin \vartheta / \gamma_k \sqrt{2} \right)_{ex} = \frac{\alpha - \alpha^*}{i\sqrt{2}} = \sqrt{2} |\alpha| \sin \vartheta.$$

При  $2\gamma_k |\alpha| = A$  из этих соотношений следуют выражения, справедливые для классических волн.

Далее нам понадобится вспомогательное равенство

$$\langle n \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} \varphi^*(\zeta | \alpha) \hat{\alpha}^+ \hat{\alpha} \varphi(\zeta | \alpha) d\zeta =$$

$$= \alpha \int_{-\infty}^{\infty} \varphi^*(\zeta | \alpha) \hat{\alpha}^+ \varphi(\zeta | \alpha) d\zeta =$$

$$= \alpha \int_{-\infty}^{\infty} \hat{\alpha} \varphi^*(\zeta | \alpha) \varphi(\zeta | \alpha) d\zeta = \alpha \alpha^*.$$

Поскольку усреднение по когерентным состояниям даёт

$$\langle \hat{A}^v(\mathbf{r}, t) \rangle = \sum_{k\lambda} e_{k\lambda}^v \gamma_k \left( \alpha_{k\lambda} e^{ikr - ikt} + \alpha_{k\lambda}^* e^{-ikr + ikt} \right),$$

$$\langle E^v(\mathbf{r}, t) \rangle = -\frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} \langle E^v(\mathbf{r}, t) \rangle = \sum_{k\lambda} e_{k\lambda}^v E_{k\lambda} \sin(\mathbf{k}\mathbf{r} - kct + \vartheta),$$



$$E_{k\lambda} = -2\sqrt{\frac{2\pi\hbar\omega_k}{V}}|\alpha_{k\lambda}|,$$

то для этих состояний с учётом вспомогательного равенства, записанного в виде  $|\alpha| = \sqrt{\langle n \rangle}$ , находим  $E_{k\lambda}^2 V / 8\pi = \hbar\omega_k \langle n_{k\lambda} \rangle$ . Вводя понятие действующей амплитуды поля  $\bar{E}_{k\lambda} = E_{k\lambda} / \sqrt{2}$ , приходим к выводу:  $\bar{E}_{k\lambda}^2 V / 4\pi = \hbar\omega_k \langle n_{k\lambda} \rangle$ . Итак, если электромагнитная волна находится в квантовом когерентном состоянии, то точно фиксированным числом фотонов она не обладает, а её энергию можно вычислять как по квантовой формуле, так и по классической.

Как квантовые средние, так и наиболее вероятные параметры электромагнитного поля совпадают с их классическими аналогами, если свободное поле находится в квантовом когерентном состоянии. Но это не означает, что каждое измерение даст значения классических параметров. Согласно распределениям (18), возникнет разброс экспериментальных точек. Величина этого разброса определяется дисперсиями распределений (18), которые не зависят от амплитуд полей. По этой причине, если амплитуды велики, то дисперсиями можно пренебречь. В таком случае плоская электромагнитная волна, находящаяся в квантовом когерентном состоянии, хорошо описывается классической теорией. Но это ещё не означает, что результат взаимодействия таких волн со средой также всегда допускает классическое описание. Такой пример приводится ниже. Ещё раз подчеркнём, что значительная величина квантового когерентного поля сама по себе ещё недостаточна для использования классических уравнений Максвелла.

Нелишне заметить, что находящееся в фоковском состоянии поле при большом числе фотонов может обладать очень большой энергией и разрушительной силой, но классического описания такого поля не существует.

#### 4. Взаимодействие электромагнитного поля со средой

Мы рассмотрим примеры, показывающие, что эволюция сколь угодно сильного и находящегося в квантовом когерентном состоянии  $\langle \hat{A}(\mathbf{r}, t) \rangle \neq 0$  электромагнитного

поля может не подчиняться законам классической физики.

Рассмотрим систему, состоящую из взаимодействующих между собой возбуждённого атома и квантованного электромагнитного поля. Для простоты будем считать, что атом обладает одним валентным электроном и двумя энергетическими уровнями: основным и возбуждённым. Волновую функцию электрона в возбуждённом атоме обозначим через  $\psi_{j_{ex}}(\mathbf{r})$ , в невозбуждённом состоянии – через  $\psi_{j_g}(\mathbf{r})$ . Спиновыми эффектами пренебрежём.

Пусть на атом, находящийся в возбуждённом состоянии  $\psi_{j_{ex}}(\mathbf{r})$ , действует однофотонное ( $k_0\lambda_0$ ) излучение, находящееся в квантовом когерентном состоянии  $\varphi(\zeta|\alpha)$ . В результате процесса рассеяния полная волновая функция системы атом+поле приобретает вид:

$$\Psi(t) = f_{j_{ex}}(t)\psi_{j_{ex}}(\mathbf{r}) + f_{j_g}(t)\psi_{j_g}(\mathbf{r}). \quad (19)$$

Функция  $f_{j_{ex}}(t)$  описывает когерентный канал рассеяния, в результате которого рассеивающий атом остаётся в исходном возбуждённом состоянии. Функция  $f_{j_g}(t)$  описывает канал рассеяния, в результате которого атом меняет своё состояние на невозбуждённое. Этот канал будем называть некогерентным. Поскольку в исходном состоянии электромагнитное поле обладает «квантовым средним» значением амплитуды  $\langle \hat{A}^v(\mathbf{r}, t) \rangle$ , то и после рассеяния эта конструкция не обратится в ноль. Ниже вместо оператора  $\hat{A}^v(\mathbf{r}, t)$  будем пользоваться оператором напряжённости электрического поля

$$\hat{E}^v(\mathbf{k}, t) = -\frac{1}{c} \frac{\partial \hat{A}^v(\mathbf{r}, t)}{\partial t} = i \sum_{k\lambda} e_{k\lambda}^v k \gamma_k \left( \hat{\alpha}_{k\lambda}^{ikr-ikt} - \hat{\alpha}_{k\lambda}^+ e^{-ikr+ikt} \right).$$

«Квантовое среднее» напряжённости электрического поля после рассеяния вычисляется по стандартному правилу:

$$\begin{aligned} \langle \hat{E}^v(\mathbf{r}, t) \rangle &= \langle \Psi | \hat{E}^v(\mathbf{r}, t) | \Psi \rangle = \\ &= \langle f_{j_{ex}} \psi_{j_{ex}} | \hat{E}^v(\mathbf{r}, t) | f_{j_{ex}} \psi_{j_{ex}} \rangle + \langle f_{j_g} \psi_{j_g} | \hat{E}^v(\mathbf{r}, t) | f_{j_g} \psi_{j_g} \rangle = \\ &= \langle f_{j_{ex}} | \hat{E}^v(\mathbf{r}, t) | f_{j_{ex}} \rangle + \langle f_{j_g} | \hat{E}^v(\mathbf{r}, t) | f_{j_g} \rangle = \\ &= E^{v(c)}(\mathbf{r}, t) + E^{v(n)}(\mathbf{r}, t). \end{aligned} \quad (20)$$

Здесь явно указана описываемая выражением (19) функция  $\Psi(t)$ , по которой производится квантовое усреднение,

и принято во внимание, что оператор  $\hat{E}^v(\mathbf{r}, t)$  не изменяет взаимно ортогональные  $\langle \psi_j | \psi_{j'} \rangle = \int \psi_j^*(\mathbf{r}) \psi_{j'}(\mathbf{r}) = \delta_{jj'}$

и нормированные на единицу волновые функции атомов. По этим причинам атомные функции выпадают из этой формулы, так же как выпадает интерференционный член

$$\langle f_{j_{ex}} \psi_{j_{ex}} | \hat{A}^v(\mathbf{r}, t) | f_{j_g} \psi_{j_g} \rangle = 0. \text{ Важно отметить, что интерфе-}$$

ренционный член обращается в ноль из-за свойств ортогональности атомных функций, что исключает «квантовые интерференционные члены» электромагнитного поля. Классическая физика таким свойством не обладает. Будем говорить, что когерентный и некогерентный каналы рассеяния между собой квантово некогерентны. Но классическая когерентность в виде суммирования амплитуд согласно (20) сохраняется. Из когерентного канала рассеяния процессы вынужденного излучения, меняющие состояние рассеивателя, выпадают. Таким образом, следует различать два вида когерентности: «квантовую», зависящую от фаз полной волновой функции системы, и «классическую», определяемую фазами усреднённых амплитуд поля. При процессе усреднения квантовые фазы исчезают.

Пусть теперь нас интересуют энергетические характеристики рассеянного поля, описываемые «квантовыми средними» от билинейных комбинаций полевых операторов

$$\begin{aligned} \langle \hat{E}^v(\mathbf{r}, t) \hat{E}^v(\mathbf{r}, t) \rangle &= \langle \Psi | \hat{E}^v(\mathbf{r}, t) \hat{E}^v(\mathbf{r}, t) | \Psi \rangle = \\ &= \langle f_{ex} \Psi_{j_{ex}} | \hat{E}^v(\mathbf{r}, t) \hat{E}^v(\mathbf{r}, t) | f_{ex} \Psi_{j_{ex}} \rangle + \\ &+ \langle f_g \Psi_{j_g} | \hat{E}^v(\mathbf{r}, t) \hat{E}^v(\mathbf{r}, t) | f_g \Psi_{j_g} \rangle. \end{aligned} \quad (21)$$

Здесь вновь и по той же причине отсутствует перекрёстное слагаемое. Оба слагаемых здесь положительно определены. Таким образом, энергетические характеристики рассеянного поля определяются независимо двумя каналами реакции и затем алгебраически складываются. Согласно (21), интерференции между каналами нет. Очень важно отметить, что нет интерференции и между содержащимися в некогерентном канале процессами вынужденного излучения и процессами рассеяния, не меняющими состояние атомной системы. В этом смысле некогерентные свойства вынужденных процессов, что редко оговаривается, могут существенно менять макроскопическую картину рассеянного поля.

Оценку усреднённых билинейных конструкций (21) удобно выполнить с помощью известного неравенства

$$\langle \hat{B}\hat{B} \rangle \gg \langle \hat{B}\hat{B} \rangle \langle \hat{B}\hat{B} \rangle,$$

справедливого для любых операторов и любой процедуры усреднения. Применяя это неравенство к обоим слагаемым равенства (21), получаем оценку снизу для исследуемой конструкции

$$\begin{aligned} \langle \hat{E}^v(\mathbf{r}, t) \hat{E}^v(\mathbf{r}, t) \rangle &\gg E^{v(c)}(\mathbf{r}, t) E^{v(c)}(\mathbf{r}, t) + \\ &+ E^{v(n)}(\mathbf{r}, t) E^{v(n)}(\mathbf{r}, t). \end{aligned} \quad (22)$$

Только если некогерентный канал (и процессы вынужденного излучения) отсутствует или по каким-либо причинам отсутствует когерентный канал рассеяния, энергия рассеянного электромагнитного поля определяется квадратом амплитуды рассеяния, что напоминает равенство, присущее классическим полям. Другими словами, классическая физика может корректно описать процесс рассеяния резонансного излучения лишь в исключительных случаях. В общем случае, если рассеиваемое излучение почти классическое и находится в квантовом когерентном состоянии, то рассеянное излучение это свойство теряет. Согласно (22), энергия рассеянного излучения состоит из двух слагаемых, определяемых разными каналами рассеяния. Энергетические характеристики этих каналов складываются. «Квантовое когерентное» состояние таким свойством не обладает. Можно сказать, что в рассеянном излучении наряду с квантовой когерентной компонентой возникает «фоковская» компонента. Величина «фоковской» компоненты может достигать ста процентов от общего излучения. Такое излучение в представлениях классической физики описано быть не может. Так обстоит дело и при

френелевском отражении резонансного излучения от возбуждённых сред [6]. Говорят, что в этих случаях мы имеем дело с расхождением предсказаний классической и квантовой физики на макроскопическом уровне.

## 5. Заключение

Обратим внимание на равенство

$$\begin{aligned} \varphi(\zeta|\alpha) &= \pi^{-1/4} \exp \left[ -\frac{(\alpha + \alpha^*)^2}{4} + \sqrt{2} \alpha \zeta - \frac{1}{2} \zeta^2 \right] = \\ &= e^{-\frac{|\alpha|^2}{2}} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\alpha^n}{\sqrt{n!}} \varphi(\zeta|n), \end{aligned}$$

указывающее, что наиболее близкое к классическим представлениям «квантовое когерентное» состояние электромагнитного поля может быть представлено в виде суммы фотонных (фоковских) состояний, не имеющих классических аналогов. Это «квантовое когерентное» состояние словесно может быть описано с помощью понятий «амплитуда», «фаза» и «дисперсия» этих величин, тогда как фотонные (фоковские) состояния этими атрибутами не обладают. В фоковских состояниях мы используем понятие «фотон». Существует и обратное соотношение [7]:

$$\begin{aligned} \varphi(\zeta|n) &= \frac{1}{\pi} \iint \frac{\alpha^{*n}}{\sqrt{n!}} e^{-\frac{1}{2}|\alpha|^2} \varphi(\zeta|\alpha) d^2\alpha, \quad d^2\alpha = \\ &= d(\operatorname{Re}\alpha) d(\operatorname{Im}\alpha), \end{aligned}$$

указывающее, что фотонные (фоковские) состояния, не обладающие понятиями «фаза» и «амплитуда», представимы в виде суперпозиции «квантовых когерентных» состояний, этими понятиями характеризующихся. Принято говорить, что мы решаем задачу в фотонном (фоковском) или в когерентном представлении. Таким образом, объективной характеристикой электромагнитного поля является его состояние, описываемое волновой функцией. В зависимости от выбранного нами математического представления, конкретный вид этой функции может быть сильно различным. Она может быть представлена в виде ряда, как по функциям  $\varphi(\zeta|\alpha)$ , так и по функциям  $\varphi(\zeta|n)$ .

Такие атрибуты, как амплитуда, фаза и число фотонов, присущи конкретным представлениям и не являются инвариантами относительно зависящего от нас выбора представления. В этом смысле эти атрибуты не следует абсолютизировать и придавать им универсальный смысл.

Необходимость квантования электромагнитного поля следует как из логических соображений, так и из различия результатов расчётов квантованных и классических полей, что качественно продемонстрировано выше на избранных примерах.

## ЛИТЕРАТУРА

1. де Бройль Л. Волны и кванты. Избранные научные труды. Том 1. – М: Логос, 2010.

2. *Гринштейн Дж., Зайонц А.* Квантовый вызов (Современные исследования оснований квантовой механики). – Долгопрудный: Издательский дом «Интеллект», 2012.

3. *Лоуден Р.* Квантовая теория света. – М.: МИР, 1976.

4. *Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М.* Теория поля. – М.: Наука, 1988.

5. *Гайтлер В.* Квантовая теория излучения. – М.: ИИЛ, 1956.

6. *Векленко Б.А.* Нарушение формул Френеля при отражении резонансного излучения от возбужденных сред // Прикладная физика. – 2011. – № 1. – С. 5–14.

7. *Клаудер Дж., Сударшан Э.* Основы квантовой оптики. – М.: МИР, 1970.



**Векленко Борис Александрович**, доктор физико-математических наук, профессор главный научный сотрудник ОИВТ РАН. Окончил МЭИ в 1955. Защитил докторскую диссертацию в 1991. В настоящее время работает над проблемами квантовой теории излучения.

Уважаемые читатели!

Приглашаем Вас принять участие в **28-й Международной конференции по компьютерной графике, обработке изображений и машинному зрению, системам визуализации и виртуального окружения GraphiCon2018**, которая состоится **24-27 сентября 2018** года на базе «Национального исследовательского Томского политехнического университета».

# ГРАФИКОН 2018



## Секции конференции

- Геометрическое моделирование.  
Компьютерная графика в образовании
- Обработка и анализ биомедицинских изображений
- Научная визуализация и визуальная аналитика
- Цифровая Земля и Большие Данные
- Компьютерная графика и Дизайн
- Реалистичная графика
- Компьютерное зрение
- Оптический дизайн

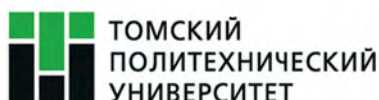
Впервые программа мероприятия дополнена молодежной сессией, в рамках которой будут заслушаны доклады студентов и аспирантов, а также будет проведен форум, включающий мастер-классы, по организации научной, научно-технической и инновационной деятельности, лекции и презентации о лучших российских и зарубежных практиках, продвижении и популяризации научных достижений. Участие в форуме молодежной сессии поможет молодым ученым найти единомышленников и получить адресную поддержку в виде рекомендации к участию в фондовых программах.

Все участники форума получат сертификаты о повышении квалификации. Лучшие доклады среди участников молодежной сессии будут отмечены дипломами и опубликованы.

Тезисы всех участников будут опубликованы в сборнике трудов конференции (РИНЦ).

Лучшие доклады ученых будут опубликованы в виде полнотекстовых статей в 4 научных изданиях, индексируемых в б/д Scopus.

При регистрации участия до 01.03.2018г. необходимо указать тему доклада и авторов. Тезисы доклада возможно загрузить отдельно в более поздние сроки (до 15.05.2018г.)



**ТОМСКИЙ  
ПОЛИТЕХНИЧЕСКИЙ  
УНИВЕРСИТЕТ**

## Важная информация

Сайт конференции: 2018.graphicon.ru

Регистрация на сайте: до 01.03.2018г.

Подача тезисов докладов: до 15.05.2018г.

Е-mail для связи: 2018@graphicon.ru

Телефон для справок: +7 (3822) 60-61-29