

# Влияние поляризации света на световое поле в сценах с многократным отражением

В.П. БУДАК<sup>1</sup>, А.В. ГРИМАЙЛО<sup>2</sup>

НИУ «МЭИ», Москва

<sup>1</sup>E-mail: budakvp@gmail.com;

<sup>2</sup>E-mail: grimailoav@gmail.com

## Аннотация

Статья посвящена роли поляризации при расчёте многократных отражений. Приведена математическая модель многократных отражений на основе вектора Стокса для описания луча и матриц Мюллера для описания свойств поверхности. На основе данной модели уравнение глобального освещения обобщается на случай поляризации и сводится к объёмному интегрированию. Это позволяет получить выражение для локальных оценок метода Монте-Карло и впервые использовать их для оценки светораспределения в сцене с учётом поляризации. Полученная математическая модель была реализована в программной среде на примере сцены, поверхности которой имеют как диффузную составляющую в отражении, так и зеркальную. Приведённые в статье результаты показывают, что разница при расчётах с учётом поляризации может достигать более 30 % по сравнению со стандартным моделированием.

**Ключевые слова:** поляризация, многократные отражения, локальные оценки, метод Монте-Карло, матрица Мюллера, вектор Стокса.

## Введение

Развитие вычислительной техники и программного обеспечения в последние десятилетия привело к тому, что сегодня проектирование любой осветительной установки сопровождается моделированием светового поля в сценах освещения, которое будет получено при использовании выбранных осветительных приборов. Важнейшую роль при этом играет расчёт многократных отражений (МО) света от поверхностей моделируемой сцены.

В светотехнике традиционно пренебрегают явлениями поляризации света при расчётах. В случае, когда речь идёт о небольшом количестве отражений от поверхностей с преимущественно диффузным характером отражения, такое пренебрежение не вносит заметной ошибки в результат. Однако, если приходится иметь дело с такими поверхностями, у которых отражение имеет существенную зеркальную составляющую, состояние поляризации даже полностью деполаризованного света изменится уже после первого отражения, и это будет влиять на характер всех дальнейших актов взаимодействия света с поверхностями сцены.

Очевидно, что после достаточного количества переотражений свет станет снова деполаризованным. Тем не менее, остаётся неясным, как учёт поляризации повлияет на конечный результат светотехнического расчёта. Существующие на сегодняшний день оценки говорят, что расхождение в результатах между классическим расчётом

и расчётом с учётом поляризации света может достигать более 20 % [1]. Подтверждение этого будет означать необходимость учёта состояния поляризации в решении прикладных задач (например, таких как расчёт освещённости в помещении с учётом МО).

На текущий момент были опубликованы результаты большого количества исследований различных авторов [2–7], в которых показано существенное влияние поляризации на получаемые изображения сцен при моделировании светораспределения на их примере. Однако в данных исследованиях не приводится сведений о том, каким образом учёт поляризации влияет на получаемые значения величин, описывающих энергетику светового излучения. Вместе с тем именно эти величины более всего интересуют специалистов, работа которых связана с решением практических задач.

Кроме того, изображения сцен, приведённые в работах указанных авторов, показывают, что при прорисовке изображений с учётом поляризации изменяется форма и положение бликов на поверхностях сцены. Таким образом, состояние поляризации света в конечном счёте влияет не только на количественные, но и на качественные характеристики светораспределения, создаваемого той или иной осветительной установкой.

## 1. Фотометрическое описание поляризации света

При выборе способа описания поляризации света необходимо обратить внимание на тот факт, что все фотометрические понятия формулируются исключительно в терминах *наблюдаемых* величин. Природа этих величин обусловлена, в частности, квадратичностью приёмников оптического излучения (т.е. реакцией на мощность), конечностью их размеров и постоянной времени [8].

В свою очередь, электромагнитная теория поля оперирует такими величинами, которые *невозможно напрямую измерить экспериментально*: амплитуда и фаза волнового поля. Поэтому при описании любого эксперимента в рамках волновой оптики неизбежно появляется необходимость перехода к фотометрической трактовке светового поля [9].

Отсюда, по мнению авторов, следует, что языком описания поляризации, наиболее соответствующим процессам измерения излучения оптическим приёмником, является использование набора четырёх параметров (или, по-другому, четырёхмерный вектор-параметр), введённых Дж.Г. Стоксом в 1852 году в [10]. Эти параметры описывают свет таким образом, что если любые полученные независимо друг от друга лучи обладают одинаковыми значениями всех четырёх компонент вектор-параметра, то они являются оптически эквивалентными и никакой опыт уже не позволяет их различить [10].

В работах [8, 9, 11] показано, что параметры Стокса применительно к фотометрии имеют размерность *яркости*, которая, в свою очередь, полностью характеризует излучение. Таким образом, полное описание луча должно включать набор четырёх параметров.

Определить компоненты вектор-параметра Стокса можно, исходя из электромагнитной теории, как это сделано в [11], или экспериментально, пропуская излучение последовательно через набор поляризационных фильтров [12]. В этом случае указанные параметры определяются по реакциям  $J_i$  соответствующих оптических приёмников:

$$\begin{aligned} L_0 &= 2J_0, & L_1 &= 2(J_0 - J_1), \\ L_2 &= 2(J_2 - J_0), & L_3 &= 2(J_3 - J_0), \end{aligned} \quad (1)$$

где  $J_i, i \in \overline{0,3}$ , различаются установленными поляризационными фильтрами:

$J_0$  – нейтральный фильтр с пропусканием 0,5;

$J_1$  – анализатор, оптическая ось которого и направление распространения излучения определяют систему отсчёта – плоскость референции;

$J_2$  – анализатор с осью под углом  $45^\circ$  к плоскости референции;

$J_3$  – комплексный фильтр, состоящий из четвертьволновой пластины и анализатора под углом  $45^\circ$  к плоскости референции.

Необходимо особо подчеркнуть, что важнейшей характеристикой параметров Стокса является система координат, в которой они заданы – плоскость референции; относительно неё определяются горизонтальное и вертикальное положения. Причём от выбора этой плоскости зависят компоненты  $L_1$  и  $L_2$ , а  $L_0$  и  $L_3$  не зависят [12].

На каждом акте взаимодействия света со средой расчёт параметров ведётся относительно новой плоскости референции, которая связана с точкой рассеяния и получается поворотом предыдущей плоскости на соответствующий угол.

Пусть плоскость референции  $\zeta$  была получена поворотом предыдущей плоскости  $\zeta'$  на некоторый угол  $\varphi$  относительно оси  $Z$ . Тогда для определённых относительно  $\zeta$  и  $\zeta'$  векторов Стокса  $\mathbf{L} = \{L_0, L_1, L_2, L_3\}$  и  $\mathbf{L}' = \{L'_0, L'_1, L'_2, L'_3\}$  выполняется [13]:

$$\mathbf{L} = \tilde{\mathbf{R}} \mathbf{L}', \quad (2)$$

где  $\mathbf{L}'$  – вектор Стокса до взаимодействия;  $\mathbf{L}$  – вектор Стокса после взаимодействия;  $\tilde{\mathbf{R}}$  – матрица вращения плоскости референции или ротатор (от лат. rotatio), которая определяется следующим образом [13]:

$$\tilde{\mathbf{R}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos 2\varphi & \sin 2\varphi & 0 \\ 0 & -\sin 2\varphi & \cos 2\varphi & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \quad (3)$$

При этом знак  $\varphi$  задаётся из условия, что связанная с лучом система координат является правовинтовой: положительному значению угла  $\varphi$  соответствует поворот против часовой стрелки, если смотреть со стороны положительных значений оси  $Z$ .

Отметим, что здесь и далее используется следующая система обозначений:

$\mathbf{a}, \bar{\mathbf{a}}, \underline{\mathbf{a}}, \bar{\underline{\mathbf{a}}}$  – вектор-столбец;

$\bar{\mathbf{a}}, \underline{\mathbf{a}}, \bar{\underline{\mathbf{a}}}$  – вектор-строка;

$\hat{\mathbf{a}}, \underline{\hat{\mathbf{a}}}, \bar{\hat{\mathbf{a}}}$  – единичный вектор-столбец;

$\bar{\mathbf{a}}, \underline{\mathbf{a}}, \bar{\underline{\mathbf{a}}}$  – матрица;

$\mathbf{a} \times \mathbf{b}$  – плоскость, образуемая векторами  $\mathbf{a}$  и  $\mathbf{b}$  с нор-

малью  $\hat{\mathbf{N}} = \frac{[\mathbf{a} \times \mathbf{b}]}{|[\mathbf{a} \times \mathbf{b}]|}$ .

## 2. Математическая модель многократных отражений света с учётом поляризации

Для создания математической модели, учитывающей поляризацию света, авторы использовали предложенный Г.В. Розенбергом в [11] метод, который основан на использовании вектор-параметра Стокса для описания состояния светового луча и матриц Мюллера для описания взаимодействия света с веществом. Рассмотрим подробнее данный метод.

Распространяясь в некоторой среде, пучок лучей вступает во взаимодействие с веществом. В тех случаях, когда уравнения электродинамики линейны и однородны, результат такого взаимодействия может быть представлен в следующем виде:

$$\mathbf{L}(\mathbf{r}, \hat{\mathbf{I}}) = \tilde{\mathbf{R}}(\hat{\mathbf{I}}' \times \hat{\mathbf{I}}, \hat{\mathbf{N}} \times \hat{\mathbf{I}}) \tilde{\rho}(\mathbf{r}, \hat{\mathbf{I}}, \hat{\mathbf{I}}') \tilde{\mathbf{R}}(\hat{\mathbf{I}}' \times \hat{\mathbf{N}}', \hat{\mathbf{I}}' \times \hat{\mathbf{I}}) \mathbf{L}(\mathbf{r}, \hat{\mathbf{I}}'), \quad (4)$$

где  $\tilde{\rho}(\mathbf{r}, \hat{\mathbf{I}}, \hat{\mathbf{I}}')$  –  $4 \times 4$  матрица Мюллера, которая описывает воздействие вещества на световой пучок;  $\tilde{\mathbf{R}}(\hat{\mathbf{I}}' \times \hat{\mathbf{N}}', \hat{\mathbf{I}}' \times \hat{\mathbf{I}})$  – матрица поворота плоскости референции от  $\hat{\mathbf{I}}' \times \hat{\mathbf{N}}'$  к  $\hat{\mathbf{I}}' \times \hat{\mathbf{I}}$ . Плоскость  $\hat{\mathbf{I}}' \times \hat{\mathbf{N}}'$  образована направлением луча после *предыдущего* рассеяния и нормалью элемента поверхности, на которой произошло *предыдущее* взаимодействие;  $\hat{\mathbf{I}}' \times \hat{\mathbf{I}}$  – направлениями лучей после *предыдущего и текущего* взаимодействия;  $\hat{\mathbf{N}} \times \hat{\mathbf{I}}$  – направлением луча после *текущего* взаимодействия и нормалью элемента поверхности, на котором произошло *текущее* взаимодействие.

Результат ряда последовательных преобразований будет получен путём применения соответствующей матрицы  $\tilde{\rho}$ , которая является произведением матриц частичных преобразований:

$$\tilde{\rho} = \prod \tilde{\mathbf{R}}_i \tilde{\rho}_i \tilde{\mathbf{R}}_i'. \quad (5)$$

В данной работе исследовался лишь случай отражения света от поверхностей сцены с различной долей френелевской составляющей. Поэтому далее речь ведётся о построении матриц Мюллера, которые описывают изменение вектора Стокса только на границе раздела сред с различным показателем преломления.

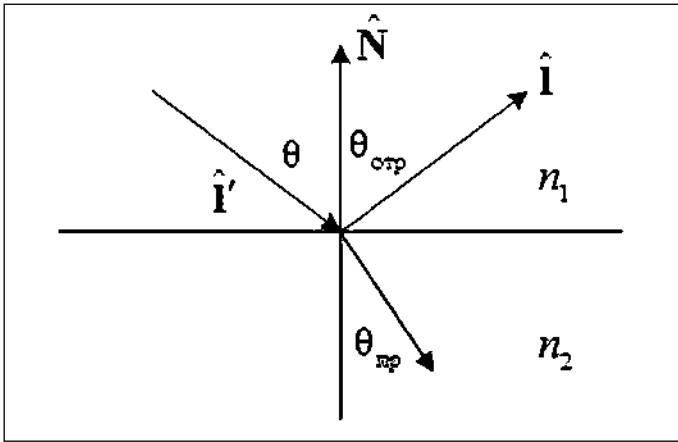


Рис. 1. Ход луча на границе двух сред

Пусть  $\theta$  – угол падения, то есть угол между направлением  $-\hat{\mathbf{I}}'$  и вектором  $\hat{\mathbf{N}}$  нормали к поверхности (рис. 1);  $\theta_{\text{отр}}$  – угол отражения;  $\theta_{\text{пр}}$  – угол преломления.

Направление  $\hat{\mathbf{I}}$  луча, отражённого от границы раздела сред, определится как:

$$\hat{\mathbf{I}} = \hat{\mathbf{I}}' - 2(\hat{\mathbf{N}}, \hat{\mathbf{I}}')\hat{\mathbf{N}}. \quad (6)$$

В общем случае при отражении от границы двух диэлектрических сред матрица Мюллера  $\vec{\rho}$  имеет следующий вид [13]:

$$\vec{\rho} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} \rho_{\perp} + \rho_{\parallel} & \rho_{\perp} - \rho_{\parallel} & 0 & 0 \\ \rho_{\perp} - \rho_{\parallel} & \rho_{\perp} + \rho_{\parallel} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2\sqrt{\rho_{\perp}\rho_{\parallel}} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2\sqrt{\rho_{\perp}\rho_{\parallel}} \end{pmatrix}, \quad (7)$$

где  $\rho_{\parallel} = \frac{\text{tg}^2(\theta - \theta_{\text{пр}})}{\text{tg}^2(\theta + \theta_{\text{пр}})}$  – френелевский ко-

эффициент отражения для луча, линейно поляризованно-

го в плоскости падения;  $\rho_{\perp} = \frac{\sin^2(\theta - \theta_{\text{пр}})}{\sin^2(\theta + \theta_{\text{пр}})}$  – френелевский

коэффициент отражения для луча, линейно поляризованного перпендикулярно плоскости падения.

При этом отражённая и преломлённая волны сохраняют поляризацию, которая у них была до взаимодействия.

В частом случае нормального падения ( $\theta = 0$ ), когда коэффициент отражения не зависит от поляризации, матрица  $\vec{\rho}$  запишется как:

$$\vec{\rho} = \rho \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} = \left( \frac{n_1 - n_2}{n_1 + n_2} \right)^2 \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}. \quad (8)$$

Для угла Брюстера  $\theta = \theta_{\text{Б}}$ , при котором  $R_{\parallel} = 0$ , матрица равна:

$$\vec{\rho} = \frac{1}{2} \cos^2 2\theta_{\text{Б}} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \text{ а}$$

$$\mathbf{L}_{\text{отр}} = \frac{1}{2} (L_0 + L_1) \cos^2 2\theta_{\text{Б}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}. \quad (9)$$

Проводя аналогию между яркостью и вектором Стокса (который представляет собой «векторную яркость»), можно получить уравнение глобального освещения с учётом поляризации подобно [14, 5].

С учётом (2) и (4) связь между упавшим и рассеянным излучением определится следующим образом:

$$\mathbf{L}(\mathbf{r}, \hat{\mathbf{I}}) = \frac{1}{\pi} \int \vec{\mathbf{R}}(\hat{\mathbf{I}}' \times \hat{\mathbf{I}}, \hat{\mathbf{N}} \times \hat{\mathbf{I}}) \vec{\rho}(\mathbf{r}, \hat{\mathbf{I}}, \hat{\mathbf{I}}') \vec{\mathbf{R}}(\hat{\mathbf{I}}' \times \hat{\mathbf{N}}, \hat{\mathbf{I}}' \times \hat{\mathbf{I}}) \cdot \mathbf{L}(\mathbf{r}, \hat{\mathbf{I}}') |(\hat{\mathbf{N}}, \hat{\mathbf{I}}')| d\hat{\mathbf{I}}', \quad (10)$$

где  $\hat{\mathbf{I}}'$  – единичный вектор направления падения излучения;  $\hat{\mathbf{I}}$  – то же для рассеяния;  $\mathbf{r}$  – радиус-вектор точки рассеяния;  $\mathbf{L}(\mathbf{r}, \hat{\mathbf{I}})$  – вектор Стокса в точке  $\mathbf{r}$  по направлению  $\hat{\mathbf{I}}$ ;  $\hat{\mathbf{N}}$  – нормаль к поверхности;  $\vec{\mathbf{R}}(\hat{\mathbf{I}}' \times \hat{\mathbf{N}}, \hat{\mathbf{I}}' \times \hat{\mathbf{I}})$  – матрица поворота плоскости референции от  $\hat{\mathbf{I}}' \times \hat{\mathbf{N}}$  к  $\hat{\mathbf{I}}' \times \hat{\mathbf{I}}$ ;  $\vec{\rho}(\mathbf{r}, \hat{\mathbf{I}}, \hat{\mathbf{I}}')$  – матрица Мюллера в точке отражения при заданных направлениях падения и рассеяния излучения.

Условимся, что в среде между поверхностями сцены отсутствует поглощение, рассеяние и преломление. Тогда имеем краевую задачу уравнения переноса излучения (УПИ):

$$(\nabla, \hat{\mathbf{I}}) \mathbf{L}(\mathbf{r}, \hat{\mathbf{I}}) = 0, \quad (11)$$

с граничными условиями на рассеивающих поверхностях:

$$\mathbf{L}(\mathbf{r}, \hat{\mathbf{I}}) = \frac{1}{\pi} \oint \vec{\mathbf{R}}(\hat{\mathbf{I}}' \times \hat{\mathbf{I}}, \hat{\mathbf{N}} \times \hat{\mathbf{I}}) \vec{\rho}(\mathbf{r}, \hat{\mathbf{I}}, \hat{\mathbf{I}}') \cdot \vec{\mathbf{R}}(\hat{\mathbf{I}}' \times \hat{\mathbf{N}}, \hat{\mathbf{I}}' \times \hat{\mathbf{I}}) \mathbf{L}(\mathbf{r}, \hat{\mathbf{I}}') |(\hat{\mathbf{N}}, \hat{\mathbf{I}}')| d\hat{\mathbf{I}}', \quad (12)$$

и на излучающих:

$$\mathbf{L}(\mathbf{r}, \hat{\mathbf{I}}) = \mathbf{L}_0(\mathbf{r}, \hat{\mathbf{I}}). \quad (13)$$

Решив уравнение (1) и перейдя к интегралу по поверхности, получим:

$$\mathbf{L}(\mathbf{r}, \hat{\mathbf{I}}) = \mathbf{L}_0(\mathbf{r}, \hat{\mathbf{I}}) + \frac{1}{\pi} \int \vec{\mathbf{R}}(\hat{\mathbf{I}}' \times \hat{\mathbf{I}}, \hat{\mathbf{N}} \times \hat{\mathbf{I}}) \vec{\rho}(\mathbf{r}, \hat{\mathbf{I}}, \hat{\mathbf{I}}') \cdot \vec{\mathbf{R}}(\hat{\mathbf{I}}' \times \hat{\mathbf{N}}, \hat{\mathbf{I}}' \times \hat{\mathbf{I}}) \mathbf{L}(\mathbf{r}, \hat{\mathbf{I}}') \cdot \frac{|(\hat{\mathbf{N}}, \hat{\mathbf{I}}')(\hat{\mathbf{N}}', \hat{\mathbf{I}}')|}{(\mathbf{r} - \mathbf{r}')^2} d^2\mathbf{r}', \quad (14)$$

где  $\hat{\mathbf{N}}' = \hat{\mathbf{N}}(\mathbf{r}') -$  нормаль к поверхности в точке  $\mathbf{r}'$ . Интегрирование ведётся по видимой напрямую части поверхности сцены.

Уравнение глобального освещения (УГО) для вектора Стокса примет окончательный вид, если ввести в него функцию видимости  $\Theta(\mathbf{r}, \mathbf{r}')$  элемента  $d^2\mathbf{r}'$  из точки  $\mathbf{r}$ :

$$\mathbf{L}(\mathbf{r}, \hat{\mathbf{i}}) = \mathbf{L}_0(\mathbf{r}, \hat{\mathbf{i}}) + \frac{1}{\pi} \int \bar{\mathbf{R}}(\hat{\mathbf{i}}' \times \hat{\mathbf{i}}, \hat{\mathbf{N}} \times \hat{\mathbf{i}}) \bar{\rho}(\mathbf{r}, \hat{\mathbf{i}}, \hat{\mathbf{i}}') \bar{\mathbf{R}}(\hat{\mathbf{i}}' \times \hat{\mathbf{N}}', \hat{\mathbf{i}}' \times \hat{\mathbf{i}}) \cdot \mathbf{L}(\mathbf{r}, \hat{\mathbf{i}}') F(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \Theta(\mathbf{r}, \mathbf{r}') d^2\mathbf{r}', \quad (15)$$

$$F(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = \frac{|\hat{\mathbf{N}}(\hat{\mathbf{i}}')(\hat{\mathbf{N}}', \hat{\mathbf{i}}')|}{(\mathbf{r} - \mathbf{r}')^2} = \frac{|\hat{\mathbf{N}}(\mathbf{r} - \mathbf{r}')(\hat{\mathbf{N}}', \mathbf{r} - \mathbf{r}')|}{(\mathbf{r} - \mathbf{r}')^4}. \quad (16)$$

### 3. Решение УГО

Уравнение (2), так же как и стандартное уравнение глобального освещения, полученное в [14, 15], не имеет в общем случае аналитического решения. Поэтому при его решении необходимо использовать численные методы. Наиболее часто для этой цели применяются методы Монте-Карло (ММК). Смысл данного подхода заключается в нахождении решения задачи путём оценки его математического ожидания при помощи моделирования случайных величин.

В рамках данного исследования был разработан ряд программ, которые реализовывали метод прямого моделирования светораспределения без учёта поляризации. В процессе работы этот подход проявил ряд своих известных недостатков, связанных с трудностью формирования сетки и большим потреблением памяти, а потому был признан неэффективным при решении задач моделирования многократных отражений с учётом поляризации.

Для решения УГО с учётом поляризации было предложено использовать локальные оценки метода Монте-Карло. Данный метод впервые был предложен в работе [16] и отличается от методов прямого моделирования тем, что в этом случае оценивается не распределение фотонов сразу по *всем поверхностям* сцены, а вероятность попадания фотонов именно в *интересующие нас точки*. Применительно к рассматриваемой задаче, метод заключается в переходе от интегрирования по *поверхности* к интегрированию по *объёму* путём введения под интеграл  $\delta$ -функции, что даёт возможность строить моделирование по лучу.

Локальные оценки получили широкое распространение в задачах, связанных с переносом излучения в мутных средах. Если же рассматривать моделирование светораспределения при проектировании осветительных установок, то данный метод стал использоваться относительно недавно и был описан, в частности, в [17]. Там же показано, что локальные оценки позволяют проводить физически адекватное моделирование УГО и дают возможность по одному лучу проводить оценку сразу во всех интересующих точках, что повышает эффективность расчётов в среднем в 80–90 раз (на примере решения задачи Соболева) [17]. В силу этого, использование локальных оценок ММК при расчётах многократных отражений с учётом поляризации представляется тем более перспективным, если учиты-

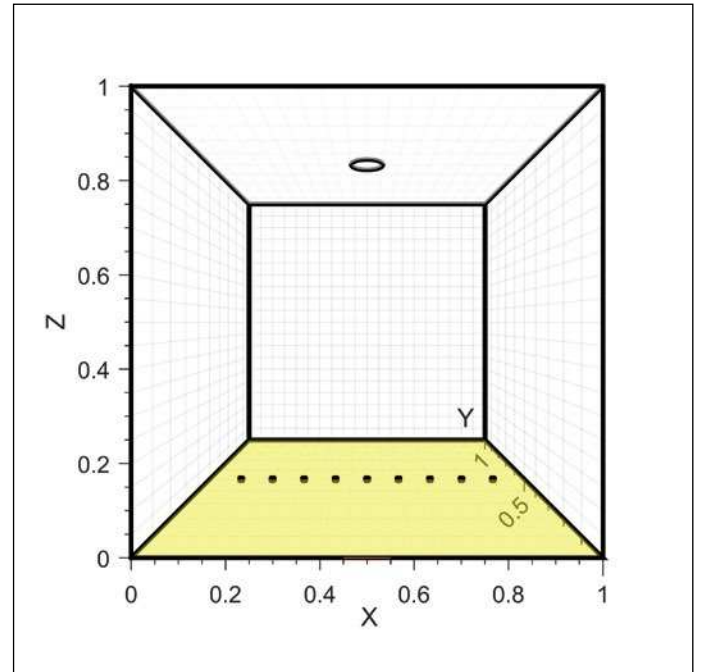


Рис. 2. Сцена для моделирования многократных отражений

вать, что на каждом шаге алгоритма необходимо выполнять большее количество операций по сравнению со стандартным моделированием.

Однако уравнение (2) является неудобным для использования методов статистического моделирования в силу того, что находящаяся под интегралом искомая функция стоит в точке  $\mathbf{r}'$ , но определяется в точке  $\mathbf{r}$ . Чтобы иметь возможность использовать локальные оценки, необходимо данное уравнение преобразовать. Причём следует учесть, что  $\mathbf{r}'$  и  $\hat{\mathbf{i}}'$  не являются независимыми и связаны следующим образом:

$$\hat{\mathbf{i}}' = \frac{\mathbf{r} - \mathbf{r}'}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|}. \quad (17)$$

Тогда уравнение (2) принимает вид:

$$\mathbf{L}(\mathbf{r}, \hat{\mathbf{i}}) = \mathbf{L}_0(\mathbf{r}, \hat{\mathbf{i}}) + \frac{1}{\pi} \int \bar{\mathbf{R}}(\hat{\mathbf{i}}' \times \hat{\mathbf{i}}, \hat{\mathbf{N}} \times \hat{\mathbf{i}}) \bar{\rho}(\mathbf{r}, \hat{\mathbf{i}}, \hat{\mathbf{i}}') \bar{\mathbf{R}}(\hat{\mathbf{i}}' \times \hat{\mathbf{N}}', \hat{\mathbf{i}}' \times \hat{\mathbf{i}}) \mathbf{L}(\mathbf{r}, \hat{\mathbf{i}}') \delta(\hat{\mathbf{i}} - \hat{\mathbf{i}}') F(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \Theta(\mathbf{r}, \mathbf{r}') d^3\mathbf{r}'. \quad (18)$$

УГО для вектора Стокса содержит в себе  $\delta$ -функцию, которая затрудняет моделирование оценками метода Монте-Карло. Эту особенность можно устранить, если проинтегрировать по пространству. В результате оценка примет вид:

$$\mathbf{I}_\varphi = M \sum_{n=0}^{\infty} \bar{\mathbf{k}}(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \mathbf{Q}_n \quad \text{или} \quad \begin{pmatrix} I_{\varphi 0} \\ I_{\varphi 1} \\ I_{\varphi 2} \\ I_{\varphi 3} \end{pmatrix} = M \sum_{n=0}^{\infty} \bar{\mathbf{k}}(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \begin{pmatrix} Q_{n0} \\ Q_{n1} \\ Q_{n2} \\ Q_{n3} \end{pmatrix}, \quad (19)$$



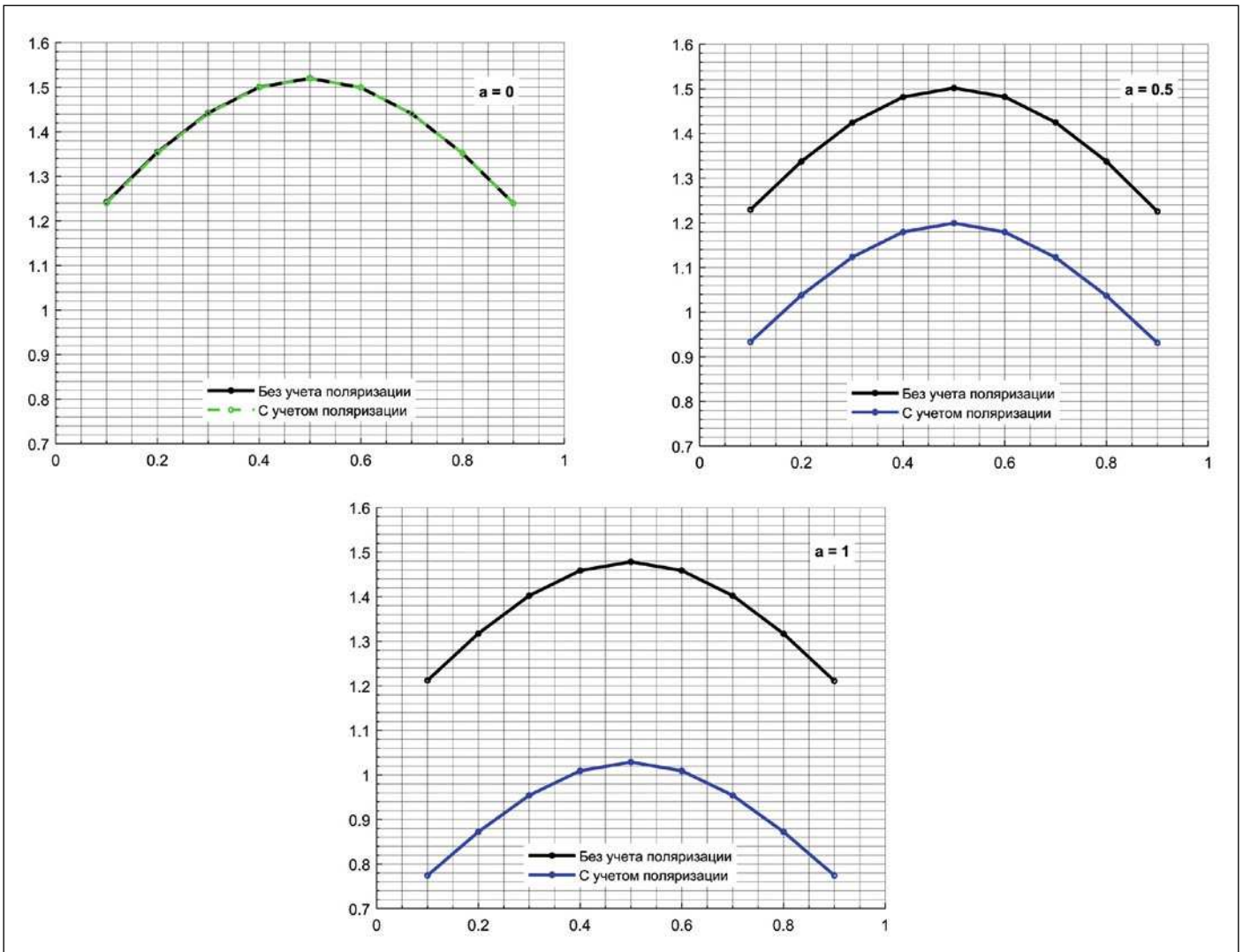


Рис. 3. Распределение освещённости при различных  $a$

$$\begin{aligned} \bar{\mathbf{k}}(\mathbf{r}, \mathbf{r}') &= \bar{\mathbf{R}}(\hat{\mathbf{l}}' \times \hat{\mathbf{l}}, \hat{\mathbf{N}} \times \hat{\mathbf{l}}) \bar{\rho}(\mathbf{r}, \hat{\mathbf{l}}, \hat{\mathbf{l}}') \\ &\bar{\mathbf{R}}(\hat{\mathbf{l}}' \times \hat{\mathbf{N}}', \hat{\mathbf{l}}' \times \hat{\mathbf{l}}) F(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \Theta(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \end{aligned} \quad (20)$$

где  $\mathbf{Q}_n$  – векторный вес луча, компоненты которого соответствуют компонентам вектора Стокса,  $M$  – оператор усреднения.

Выражение (19) носит название локальной оценки метода Монте-Карло и даёт возможность оценивать освещённость в интересующей нас точке  $\mathbf{r}$  пространства, в котором моделируются многократные отражения.

#### 4. Реализация математической модели и результаты

Предложенный выше способ решения УГО с учётом поляризации локальными оценками метода Монте-Карло был реализован в среде MATLAB. В качестве сцены для моделирования многократных отражений была выбрана «комната» размерами  $1 \times 1 \times 1$ , в центре «потолка» которой установлен ламбертовский источник в форме диска радиусом 0,05. На «полу» комнаты расположено девять точек, в которых оценивается освещённость (рис. 2).

В программе при расчётах в качестве матрицы отражения использовалась сумма двух матриц:

$$\bar{\rho} = a \bar{\rho}_f + (1 - a) \bar{\rho}_l, \quad (21)$$

где  $\bar{\rho}_f$  – матрица Мюллера (в рассматриваемом случае для френелевского отражения);  $\bar{\rho}_l$  – матрица ламбертовского отражения;  $a$  – доля френелевского отражения ( $0 < a < 1$ ). Матрица  $\bar{\rho}_l$  представляет собой нулевую матрицу с единственным ненулевым элементом  $\rho_{l,11}$ , который равен коэффициенту отражения.

Остановимся более подробно на численном алгоритме, который использовался в исследовательской программе при моделировании взаимодействия луча с поверхностью. Практическая реализация подхода, описанного выше, представляется нетривиальной задачей из-за появления  $\delta$ -функции в выражении для индикатрисы в случае френелевского отражения. Её наличие обуславливает невозможность розыгрыша нового направления луча после взаимодействия с френелевской поверхностью и, таким образом, нивелирует эффективность локальных оценок.

Чтобы обойти данное препятствие, используется следующий алгоритм. После попадания луча в поверхность разыгрывается случайный параметр  $\alpha$ , равномерно распределённый на интервале  $(0, 1)$ . Затем, если  $\alpha < a$ , новое направление луча вычисляется по формуле (6); в про-

тивном случае луч разыгрывается в соответствии с диффузным законом. В соответствии с выбранным вариантом взаимодействия используется френелевская или ламбертовская матрица отражения.

В качестве входных переменных в программу были переданы следующие параметры поверхностей: коэффициент отражения – 0,5, коэффициент преломления – 1,5, параметр  $a$  изменялся от 0 до 1. Графики на рис. 3 демонстрируют распределения освещённости на поверхности «пола», полученные с учётом и без учёта поляризации, при различных значениях параметра  $a$ .

## 5. Заключение

Приведённые выше результаты показывают, что учёт поляризации существенно влияет на получаемые при расчётах значения светотехнических параметров. При  $a = 0,6$  разница в значениях составляет уже более 20 %, а в предельном случае – более 30 %. Следовательно, учёт поляризации необходим при решении целого ряда светотехнических задач, связанных с моделированием светораспределения.

Необходимо отметить, что описанная выше математическая модель многократных отражений света с учётом поляризации остаётся в рамках стандартных фотометрических понятий, но является обобщением на случай поляризации. Существенным отличием от стандартной модели является то, что яркость из скалярной величины преобразуется в векторную, а коэффициент отражения становится матрицей. Кроме того, появляется необходимость учёта поворота плоскости референции после каждого взаимодействия света с веществом.

Также в результате работы было получено уравнение глобального освещения для случая поляризации. Это даёт возможность использовать прежние методы, которые после определённого изменения будут учитывать состояние поляризации света. Так, было получено выражение для локальной оценки ММК с учётом поляризации. Данный метод представляется на сегодняшний день наиболее перспективным, так как даёт возможность проводить оценку всего по одному лучу сразу во всех интересующих точках сцены и ускоряет вычисления в среднем в 80–90 раз по сравнению с методами прямого моделирования.

В качестве следующих этапов работы в данной области могут быть разработка более полной модели рассеяния света на поверхностях исследуемой сцены и в подповерхностном слое среды, а также её экспериментальная проверка.

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Mishchenko M.I., Lacis A.A., Travis L.D.* Errors induced by the neglect of polarization in radiance calculations for Rayleigh-scattering atmospheres // *Journal of Quantitative Spectroscopy and Radiative Transfer.*– 1994. – Т. 51,– № 3. – С. 491–510.
2. *Wolff L.B., Kurlander D.J.* Ray tracing with polarization parameter // *IEEE Computer Graphics and Applications.*– 1990. – Т. 10.– № 6. – С. 44–55.
3. *Wilkie A., Tobler R., Ulbricht C. et al.* An analytical model for skylight polarization // *Proceedings EGSR.*– 2004. – С. 387–399.

4. *Ghosh A., Chen T., Peers P. et al.* Circularly polarized spherical illumination reflectometry // *ACM Transaction on Graphics.*– 2010. – Т. 29.– № 6. – С. 1–12.

5. *Mojzik M., Skrivan T., Wilkie A., Krivanek J.* Bi-Directional Polarised Light Transport // *Eurographics Symposium on Rendering.*– 2016.

6. *Zhdanov D., Ershov S., Shapiro L., Sokolov V., Voloboy A. et al.* Realistic image synthesis in presence of birefringent media by backward ray tracing technique // *Proc. SPIE10694, Computational Optics II, 106940D* (28 May 2018)

7. *Kozlov D.S., Debelov V.A.* Algorithm for Photorealistic Rendering of Transparent Optically Active Isotropic Crystals // *Programming and Computer Software.*– 2015. – Т. 41.– № 5. – С. 267–272.

8. *Розенберг Г.В.* Луч света // *Успехи физических наук.*– 1977. – Т. 121.– № 1. – С. 97–138.

9. *Анресян Л.А., Кравцов Ю.А.* Теория переноса излучения: статистические и волновые аспекты // *Наука. Главная редакция физико-математической литературы, Москва.*– 1983.– 216 с.

10. *Stokes G.G.* On the composition and resolution of streams of polarized light from different sources // *Transactions of the Cambridge Philosophical Society.*– 1852. – Т. IX. – С. 399.

11. *Розенберг Г.В.* Вектор-параметр Стокса // *Успехи физических наук.*– 1955. – Т. LVI.– № I. – С. 77–110.

12. *Шерклифф У.* Поляризованный свет // *Издательство «Мир», Москва.*– 1965.– 264 с.

13. *Пригарин С.М.* Основы статистического моделирования переноса поляризованного оптического излучения // *Учеб. Пособие, Новосиб. гос. ун-т, Новосибирск.*– 2010.– 109 с.

14. *Будак В.П.* Визуализация распределения яркости в трёхмерных сценах наблюдения // *Издательство МЭИ, Москва.*– 2000.– 136 с.

15. *Kajiya J.T.* The rendering equation // *In Proceedings of SIGGRAPH.*– 1986. – Т. 20.– № 4. – С. 143–150.

16. *Kalos M.H.* On the Estimation of Flux at a Point by Monte Carlo // *Nuclear Science and Engineering.*– 1963. – Т. 16.– № 1. – С. 111–117.

17. *Будак В.П., Желтов В.С., Калатуцкий Т.К.* Локальные оценки метода Монте-Карло в решении уравнения глобального освещения с учётом спектрального представления объектов // *Компьютерные исследования и моделирование.*– 2012. – Т. 4.– № 1. – С. 75–84.



**Будак Владимир Павлович**, доктор техн. наук, профессор. Окончил в 1981 г. МЭИ. Главный редактор журнала «Светотехника / Light & Engineering» и профессор кафедры «Светотехника» НИУ «МЭИ». Член-корреспондент Академии электротехнических наук РФ



**Гримайло Антон Валентинович**, студент магистратуры НИУ «МЭИ» (кафедра «Светотехника»)